目　录

第一章　矢量概念及两种基本运算

本章介绍矢量的概念以及矢量的加减法和数乘矢量两种基本运算。通过讨论可以看到，矢量既具有明显的物理意义和几何意义，其运算又具有典型的代数性质。

§1.1　矢量的概念

一、标量和矢量

我们在物理学、力学中所遇到的量，一般可分为两类。其中的一类，例如长度、质量、密度、能量、时间及温度等等，它们只有大小，在取定单位之后，都可以用一个实数来表示。这种只有大小的量叫做标量，或者叫做数量。

标量可以按普通的代数法则进行数学运算。

另一类，例如力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等等，仅用一个实数已不能完全表示出它们的特征。我们知道，速度这个量，一般说来，不仅有大小之分，而且有方向之别。又如，作用于物体上同一点的两个力，如果它们的大小相等，但是方向不同，那么作用的效果也就不同。因此，以上这些量在取定单位之后，除了用实数来表示其大小外，还需用一定的方向才能表示其性质。这种既有大小，又有方向，并且遵守一定运算法则的量，叫做矢量，又称向量。实际上，矢量概

念正是由于研究物理学的需要而产生出来的。

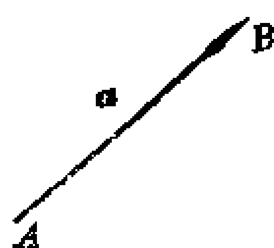


图1-1

矢量有两种表示方法：几何表示法和坐标表示法。

矢量的几何表示法借助于带有箭头的有向线段。线段的长度按选定的比例尺画出，表示矢量的大小，箭头的指向表示矢量的方向(图1-1)。

数量通常用小写的英文字母来记，如a、b、c等。矢量的标记分为两种情况，在书籍或文献中，一般用黑斜体字母表示矢量，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$等；平常在书写时，多在字母上面加一个箭头号，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等；有时也可在代表矢量起点和终点的两个字母上面加一个箭头号表示，如$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AC}$等等。在图1-1中，以A为起点、B为终点的矢量可以记作$\boldsymbol{a}$，也可以记作$\overrightarrow{AB}$。

矢量的大小叫做矢量的模。在图形中它就是有向线段的长度，通常用在代表矢量的字母两旁加两竖杠来表示，例如图1-1中矢量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$，或$|\overrightarrow{AB}|$。

矢量的模是标量。

二、矢量的种类

在物理学和力学中，矢量有三种类型：即自由矢量、滑移矢量和固定矢量。

1. 自由矢量

这种矢量的指向固定，起点任意，例如，作用于刚体上的力偶，其矩(称为力偶矩)为一自由矢量。只要保持此力偶矩不变(即保持表示方向的箭头和表示模的长度不变)，可以将力偶矩矢任意移动，而不会改变原力偶对刚体的作用。这是因

为，力偶不仅可以在其自身作用平面内任意移动，而且可以移到与原作用平面平行的任意平面上去。此外，作平移运动的刚体上的任一点，它在某一时间间隔内的位移、某一瞬时的速度和加速度，也可作为自由矢量。

2. 滑移矢量

这种矢量的指向固定，起点可以取定在方向线上的任意一点。作用在刚体上的力就是滑移矢量的一个明显的例子。又如刚体绕定轴转动时，其角速度也是滑移矢量。

3. 固定矢量

这种矢量不仅指向固定，起点也是固定的，不能随意移动。例如，当分析液体的运动时，作用在液体某一质点的力，它的作用点就取在该质点所在的点上，这样的力就是固定矢量。点电荷在非均匀电场中所受到的电场力也是固定矢量。

滑移矢量和固定矢量都只是自由矢量的特殊形式。

今后本书所提及的矢量，除特别说明外，都是指自由矢量，并简称为矢量。

由于矢量可以取空间任意一点作为它的起点，可以从空间的一个位置平行移动到另一个位置，而其运算性质不变。因此，对于矢量来说，位置不再有任何意义，矢量与起点无关。

三、矢量的相等

模相等、方向相同的矢量，叫做相等矢量。

在图1-2中，有

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

且 $$\boldsymbol{a} \nearrow\nearrow \boldsymbol{b}$$

（“$\nearrow\nearrow$”号表示两矢量平行，且指向相同）

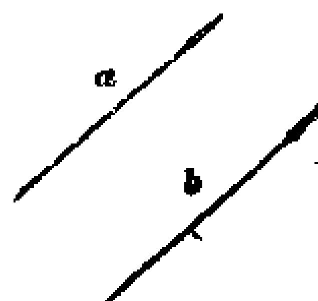


图1-2

则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

据上述矢量相等的定义可知，任何一个矢量经过平行移动后，仍为一个与原矢量相等的矢量。事实上，平移一个矢量，它的大小、方向都没有改变。因此，两个矢量经过平行移动后，如果能够重合，那么它们就是相等的。

矢量之间的不等式关系是不成立的。也就是说，对于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$两个矢量，不存在$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$的关系。但是，对于它们的模来说，有不等式

$$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}| \quad \text{或} \quad |\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$$

成立。这是因为，大小的概念只能应用于数量上，而矢量的模是数量，所以能适用不等式。

显然，若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，，则必有$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$；反之，若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，我们绝不能由此推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。由此可见，模相等只是矢量相等的必要条件，而不是充分条件。

四、零矢量、逆矢量及单位矢量

（1）模为零的矢量叫做零矢量。记作$\vec{0}$或用黑体的数$\boldsymbol{0}$表示，有$|\boldsymbol{0}|=0$。从几何上看，零矢量的起点与终点重合，即代表矢量的有向线段的长度等于零。零矢量的方向不定，或者说方向是任意的。并且规定，一切零矢量都相等。

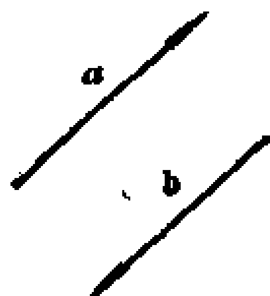


图1-3

（2）模相等、方向相反的两个矢量，叫做互为逆矢量。

在图1-3中，有

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

且 $\boldsymbol{a}\nearrow\swarrow\boldsymbol{b}$ （“$\nearrow\swarrow$”号表示两矢量平行，但指向相反）

则

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$$

任一矢量$\boldsymbol{a}$的逆矢量记作$-\boldsymbol{a}$，矢量$\overrightarrow{AB}$的逆矢量就是$\overrightarrow{BA}$，即$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$。可见，只要将一矢量的起点和终点的位置对换，就可得到它的逆矢量。由牛顿第三运动定律所指出的两物体间的作用力与反作用力，就是一对互逆矢量。

（3） 任何模为1的矢量叫做单位矢量。与矢量$\boldsymbol{a}$具有同一方向的单位矢量叫做矢量$\boldsymbol{a}$的单位矢量，并记作$\boldsymbol{a}^0$。两个单位矢量仅在方向一致时才相等。由此可见，单位矢量的特征就是方向，一个单位矢量确定一个方向；反过来说，在任何一个方向上也确定一个单位矢量。因此，我们可以用不同的单位矢量来表示空间不同的方向。

五、共线矢量和共面矢量

（1） 平行于同一直线的矢量叫做共线矢量。它们的指向可以相同，也可以相反。

在图1-4中，两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行于同一直线l，由于我们所讨论的是自由矢量，故可将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的起点放在l上的同一位置，如O点，那么它们都落在同一直线l上，因而矢量$\boldsymbol{a}$和矢量$\boldsymbol{b}$共线。这样，我们总能用在直线l上的矢量，来分别表示这些已知的互相平行的矢量。所以，共线矢量也可以理解为在同一直线上的矢量。

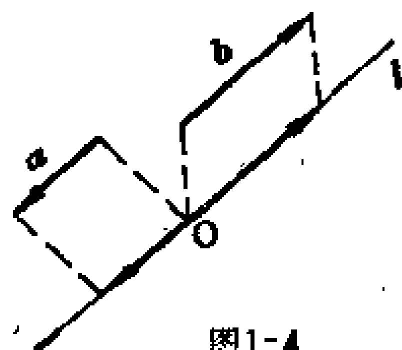


图1-4

（2） 平行于同一平面的矢量叫做共面矢量。

在图1-5中，一组矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$同时平行于同一平面N。我们

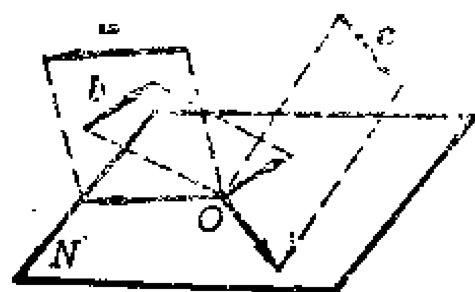


图1-5

可以将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的起点放在N上的同一点，如O点，于是它们都落在同一平面N上，因而$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个矢量共面。显然，我们总能用在N平面上的矢量，来分别表示一组已知的矢量。因此，共面矢量也可以理解为在同一平面内的矢量。

（3） 方向相同或相反的矢量叫做平行矢量。若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为平行矢量，则记作$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$。

共线矢量既然平行于某一直线，因而也一定平行于某一平面，于是可以断定：共线的矢量必定共面。但反过来并不成立，这是因为，平行于同一平面的矢量，并不一定平行于某一直线。

对于两个不共线的矢量，例如$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，可将它们的起点置于同一点O，那么它们必定分别位于两条相交于O点的直线l和m上。已知两相交直线决定一个平面，所以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$必定位于由l和m所确定的平面N上（图1-6）。由此可以断定：两个不共线的矢量必定共面。

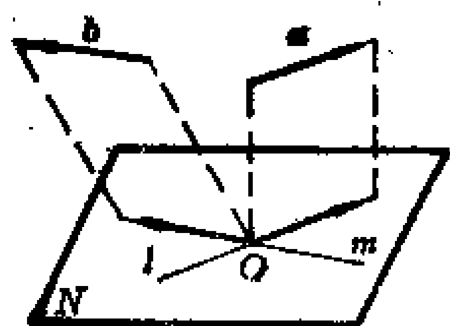


图1-6

由于零矢量的方向是任意的，因而总可以把它看成与任何矢量平行。也就是说，零矢量与任何矢量共线。

例1.1 设$ABCD\text{-}EFGH$为一平行六面体（图1-7）。在

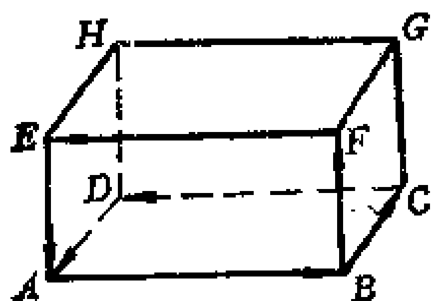


图1-7

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FE}$及$\overrightarrow{EA}$等矢量中，试找出：(1)相等矢量；(2)互逆矢量；(3)共线矢量；(4)共面矢量。

解 (1)相等矢量：$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{FE}$。

(2)互逆矢量：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$；$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{EA}$。

(3)共线矢量：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{EA}$。

(4)共面矢量：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{EA}$。

习　题

1．指出下列各物理量中哪些是标量，哪些是矢量：(1)功，(2)质量，(3)动量，(4)电磁力，(5)距离，(6)动能，(7)重量，(8)速率，(9)位移，(10)磁感应强度。

2．在一个平行四边形的边上，可以作哪些相等矢量？如果在一个正五边形或等边三角形上呢？

3．下面这些式子，哪个是合理的？哪个是不合理的，为什么？

(1) $|\boldsymbol{a}| = |-\boldsymbol{a}|$，

(2) $\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{c} + |\boldsymbol{d}|$．

(3) $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{d}|$；则 $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{c}| > |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{d}|$，

(4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{c}| > |\boldsymbol{d}|$；则$\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{c}| > \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{d}|$。

4．在一个空间平行六面体上，可以作出几组共线矢量？几组共面矢量？

5．如果把空间的所有单位矢量的起点放在同一点，它们

的终点将构成什么图形？如果把一个平面上所有单位矢量的起点放在同一点，它们的终点又构成什么图形？

6. 设有$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个矢量，已知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$也共线，问$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}$是否共线？

7. 已知矢量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线。问在什么条件下矢量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$也共线？

8. 已知矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面，矢量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$也共面。问矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{e}$是否共面？

9. 正六边形$ABCDEF$，设边长为5，又与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$三矢量对应的单位矢量分别为$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{p}$，试以$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{p}$表示$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$及$\overrightarrow{FA}$各矢量。

§1.2 矢量加减法

一、两个矢量的和

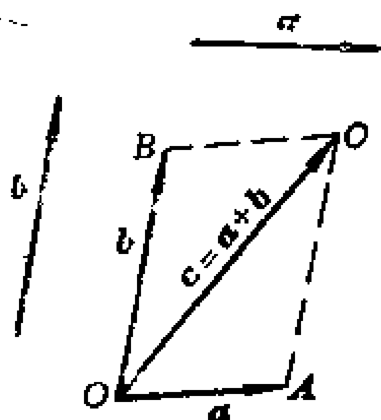


图1-8

设已知矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，以任意给定的一点O为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$及$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。再以$OA$、$OB$为邻边作平行四边形$OACB$，那么，对角线矢量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，就叫做矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和(图1-8)。记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

由矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的运算叫做**矢量加法**，而这种求两矢量和的作图法，叫做**平行四边形法则**。

关于矢量求和问题，在上述平行四边形法则的基础上，还

可得出另一个较简便的法则。事实上，从图1-8可得

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

由此有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$$

可见，求两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的和时，只要将$\boldsymbol{b}$平行移动，使$\boldsymbol{b}$的起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合。这样，从$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的矢量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，就叫做$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和(图1-9)，记作

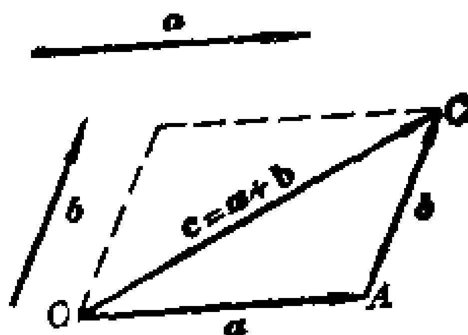


图1-9

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

这种求矢量之和的作图法，叫做三角形法则。

平行四边形法则与三角形法则是等同的，从任意有限个矢量求和即可看出。例如，已知矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，要求这四个矢量的和。为此，只须相继作出$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，使前一矢量的终点成为后一矢量的起点，那么，从第一个矢量$\boldsymbol{a}$的起点引到最后那个矢量$\boldsymbol{d}$终点的矢量，即用以封闭住这条折线$OABCD$的矢量$\overrightarrow{OD}$，就是四个矢量的和(图1-10)。

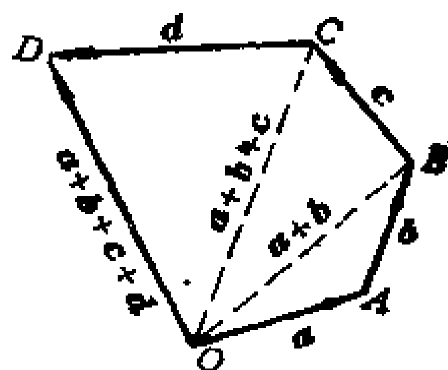


图1-10

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\\&=\overrightarrow{OB}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\\&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

以$\boldsymbol{r}$表示$\overrightarrow{OD}$，于是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$$

在图1-10中，$\overrightarrow{OD}$叫做由矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$所构成的折线$OABCD$的封闭矢量，由此可知，要作某些矢量的和，只要作出这些矢量所构成的折线的封闭矢量就可以了。这种作图法叫做多边形法则。显然，$\boldsymbol{r}=0$ 即是各矢量之和为零矢量。反过来说，如果$\boldsymbol{r}=0$，那么折线一定自形封闭。物理学中讨论平面汇交力系时，就是要设法求出各个力的合力，以判定该力系是否平衡。

上述矢量加法法则，还可推广到空间三个不共面矢量相加的情况中去。

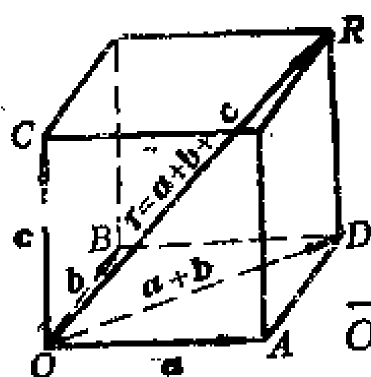


图1-11

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个不共面矢量，以它们为棱构成平行六面体，则从公共起点O所引的对角线矢量$\boldsymbol{r}$，就是这三个矢量的和(图1-11)。实际上，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}$$
$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OR}$$

即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

这种对空间三个不共面矢量求和的方法，一般叫做平行六面体法则。

前面谈到，矢量除了具有大小和方向外，还须遵守一定的运算规则，这就是平行四边形法则，这是从实践总结出来的结论。现在，我们可以对矢量作出较严格的定义：

矢量是具有一定的大小和方向，并遵从平行四边形加法法则的量。

例1.2　若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形。

证 设四边形$ABCD$，E是对角线的交点(图1-12)。由已知条件，有

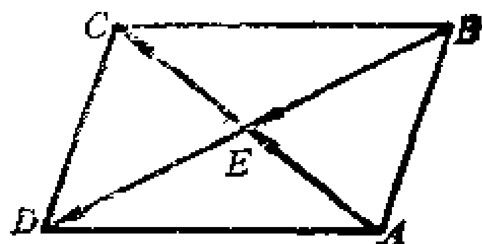


图1-12

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\quad \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}$$

两式相加

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$$

据矢量加法的平行四边形法则，得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

即

$$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|,\ \overrightarrow{AD}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$$

由此可见，AD与BC相等而且平行，所以四边形$ABCD$是平行四边形。

例1.3 设M为三角形ABC中任意一点，D、E、F分别为各边的中点(图1-13)。试证明：$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$和$\overrightarrow{MC}$的合力等于$\overrightarrow{MD}$、$\overrightarrow{ME}$和$\overrightarrow{MF}$的合力。

证 据矢量加法法则，有

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}$$

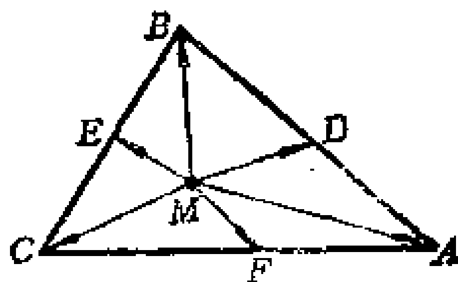


图1-13

三式相加

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}$$

且已知

$$\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

于是有

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$+\overrightarrow{ME}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

又因

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0 \quad (\text{三角形}ABC\text{是封闭的})$$

所以

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$$

二、矢量加法的性质

1. 矢量加法满足交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

证 以矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边，作平行四边形$OACB$（图1-14）。

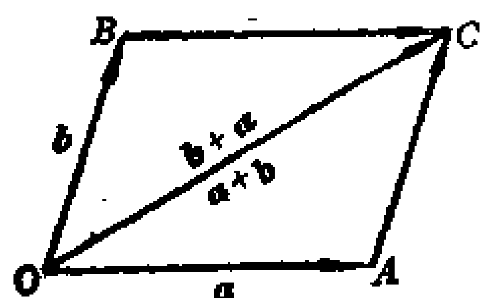


图1-14

据三角形法则，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

所以有

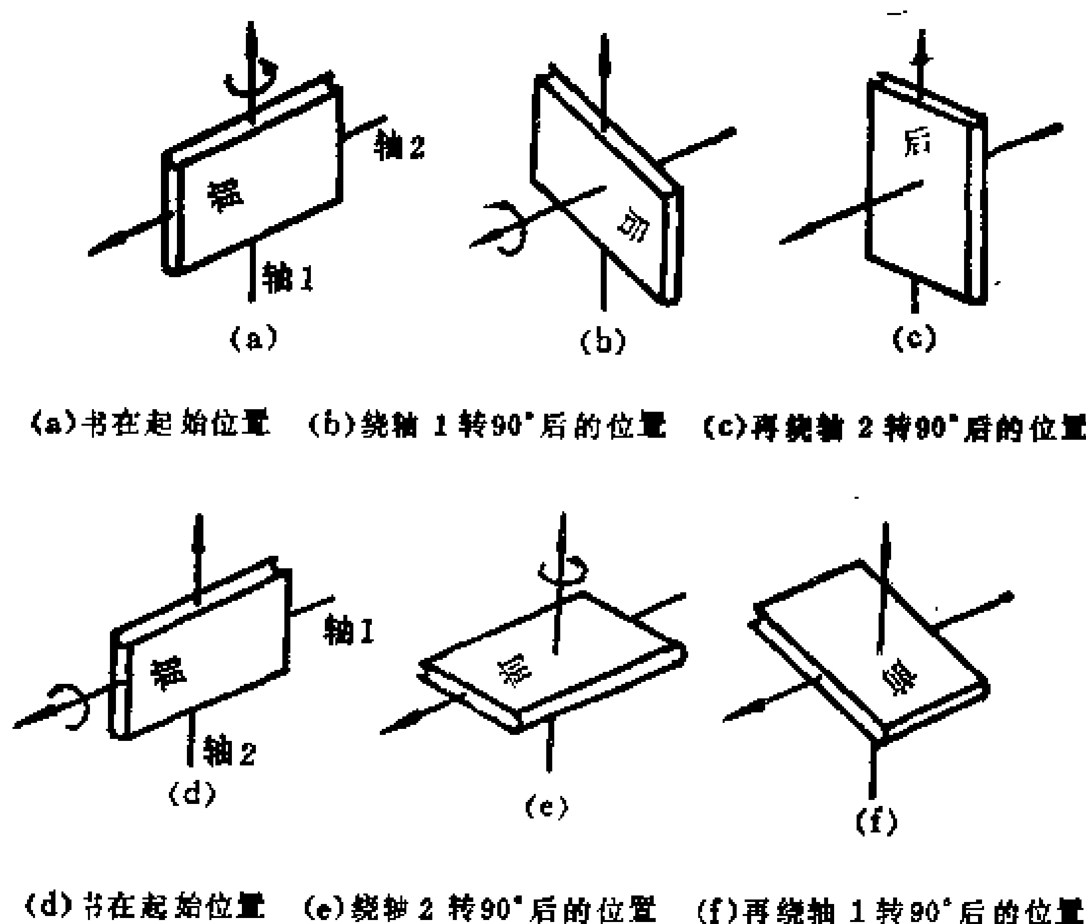
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

这表明，各矢量位置的交换并不影响求和的结果；换句话说，矢量求和的结果与各矢量的先后顺序无关①。

必须指出，并非一切有大小和方向的量都是矢量。例如，

①若a、b为共线矢量，则a＋b、b＋a显然与a、b共线，用作图法同样可以证明以上结论成立。

刚体绕空间固定轴作有限转动，其转动的量既有大小（转角或角位移），又有方向（转动的方向），可以用具有大小和方向的线段表示。然而，对于两个相继的有限转动，它的两个角位移却不能按照矢量加法法则进行求和。对于这个问题，可以用刚体（例如一本书）绕着两垂直轴的有限转动予以说明（图1-15）。容易看出，在两种不同的转动方式下，合成的结果不同。显然，这种合成结果和相加的顺序有关，因而加法交换律不再



(a)书在起始位置　(b)绕轴 1 转90°后的位置　(c)再绕轴 2 转90°后的位置

(d)书在起始位置　(e)绕轴 2 转90°后的位置　(f)再绕轴 1 转90°后的位置

图1-15

成立，也就是说，这种有限的转动不遵从矢量加法的平行四边形法则。因此，有限的角位移不是矢量。

实践表明，只有在转角极小的情况下，相加的顺序才不影响最后结果，所以极小的角位移可以看作矢量。

显然，角速度和角加速度都是矢量。

2. 矢量加法满足结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

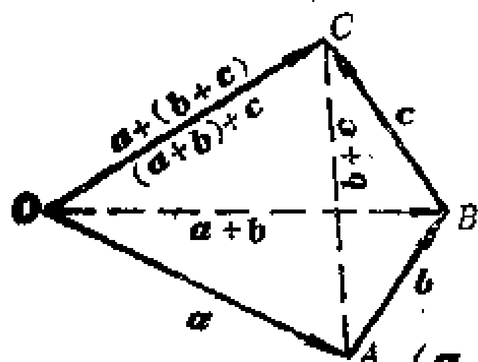


图1-16

证 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个矢量，以任一点O为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，连接$\overrightarrow{OC}$（图1-16）。由矢量加法的三角形法则，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\\\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

由此可见，矢量求和的结果与各矢量的结合顺序无关①。

此外，不难证明，对于任一矢量$\boldsymbol{a}$，必有

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$$

$$\boldsymbol{a}+0=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

即一对互逆矢量之和为零矢量；任一矢量加零矢量后，其结果不变。

例1.4 证明三个不共线矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$构成一个三角形的充要条件是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$$

证 必要性。若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$构成一个三角形，那么三矢量所围成的折线必定是自形封闭的，所以上式成立。

---

①若a、b、c三矢量共线，用作图法同样可以证明以上结论成立。

充分性。若该式成立，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$围成封闭折线，由于已设三矢量不共线，因此，构成的封闭折线必为一个三角形。

例1.5 设AL、BM、CN是三角形ABC的三条中线（图1-17）。证明$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$。

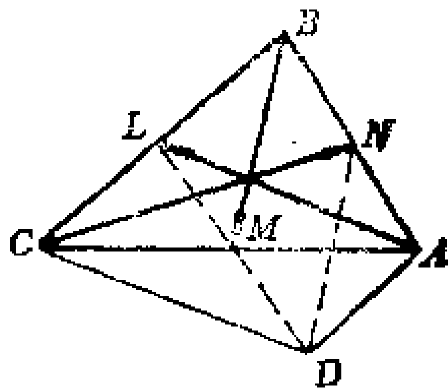


图1-17

证 我们知道，若三矢量之和为零矢量，则必定是封闭的三角形。故应设法作一个三角形，使其三边分别等于$\overrightarrow{AL}$、$\overrightarrow{BM}$和$\overrightarrow{CN}$。为此，过C点作线段CD，使$CDAL$构成平行四边形，这样，$ABLD$和$NBMD$显然也是平行四边形。于是有

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{ND}$$

所以

$$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{CN}$$
$$=0$$

三、矢量的减法

1. 已知两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，若有一矢量$\boldsymbol{c}$使得$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$成立，则称$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之差，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

由$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$求$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的运算叫做矢量减法。

由此得到求两矢量之差的作图法（图1-18）。从公共起点O作矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，则从$\boldsymbol{b}$的终点引到$\boldsymbol{a}$的终点的矢量就是$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。这种求矢量之差的方法，叫做矢量减法



图1-18

的三角形法则。

2. 对于任意两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，等式

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

恒成立，其中$-\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{b}$的逆矢量。由此可知，矢量减法是矢量加法的逆运算。从而得到矢量的减法法则：减去一个矢量等于加上该矢量的逆矢量。

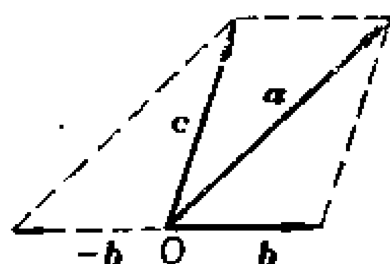


图1-19

由此，我们得到求两矢量之差的另一作图法(图1-19)：以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的逆矢量$-\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则从公共起点O引出的对角线矢量就是

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

这个方法叫做矢量减法的平行四边形法则。

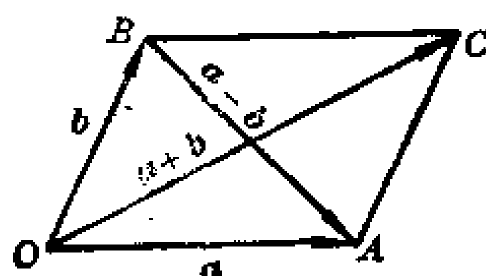


图1-20

由以上的讨论可知，若以两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边，作平行四边形$OACB$(图1-20)。则在它的两条对角线中，一条($\overrightarrow{OC}$)代表两矢量之和($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$)；另一条($\overrightarrow{BA}$)代表两矢量之差($\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$)。

3. 根据矢量的加法和减法法则以及三角学知识，可得以下的结论：

两矢量之和的模小于或等于两矢量的模之和；两矢量之差的模大于或等于两矢量的模之差。用公式表示为

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad ①$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}| \quad ②$$

证 若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$中至少有一个为零矢量，那么式①和式②显然成立(取等号)。

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都是非零矢量(图1-21)。据矢量的加法和减法法则，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$组成三角形$OAB$；$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$组成另一个三角形$OAC$。由三角学可知，三角形任何两边的长度之和不小于第三边；任何两边长度之差不大于第三边。因此，式①和式②成立。它们叫做矢量的三角形不等式。

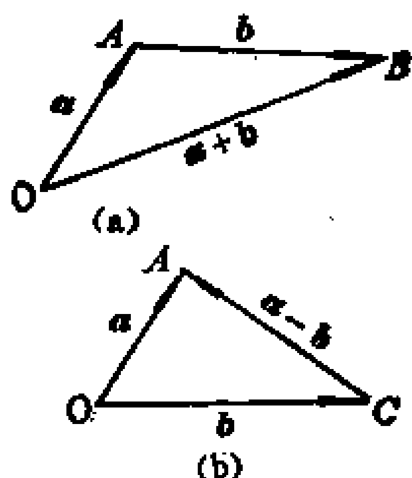


图1-21

例1.6 正六边形$ABCDEF$(图1-22)，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$。试用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示矢量$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$及$\overrightarrow{AE}$。

解 据矢量的加法及减法运算法则，有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

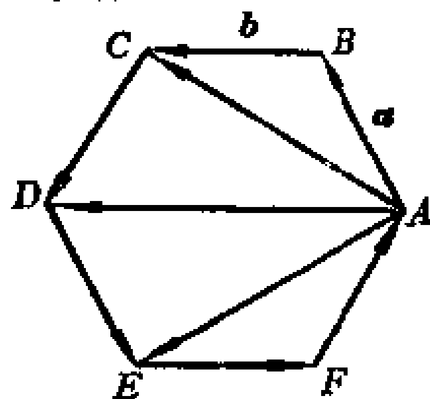


图1-22

例1.7 平行四边形$OACB$(图1-23)，其中$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。若$BM=\frac{1}{3}BD$，$DN=\frac{1}{3}DC$。

求矢量$\overrightarrow{MN}$。

解 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}$。由于$D$是两对角线的交点，则有

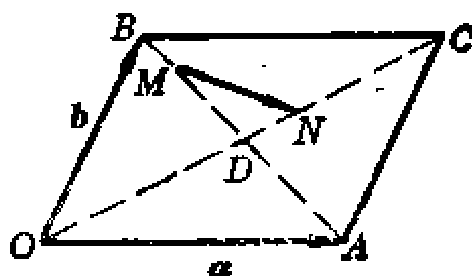


图1-23

$$\overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

又

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

所以得

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}。$$

习　　题

1．作图验证$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$。

2．两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互相垂直，$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=12$。作矢量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的图形，并计算$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$。

3．给定两个非零矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，作图表示以下各矢量：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$；

（4）$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；（5）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；（6）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$。

4．设AO是三角形ABC的中线，证明

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})。$$

5．设$ABCD$为一梯形，在梯形的平面外任取一点O，令$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$。试以矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$表示梯

形各边及二对角线。

6．若要矢量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$平分两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$间的夹角(假定三个矢量有公共起点，且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不平行)，问$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有怎样的特点？

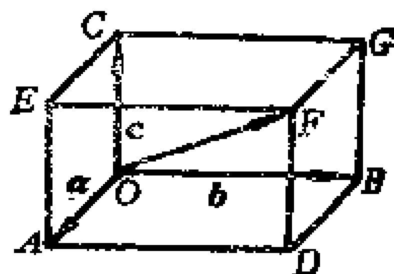
7．两个非零矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$必须满足什么几何性质，以下各式才能成立？

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；（4）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（5）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；（6）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

8．平行六面体$OADB\text{-}CEFG$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。试将各对角线$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{EB}$表示成$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的式子。



第8题图

9．设平行四边形$ABCD$的对角线AC和BD相交于E。证明：对于任一点P，必有$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PE}$。

10．证明从圆心向圆内接正三角形的顶点所引三矢量之和为零矢量。

11．试用作图法证明：

（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$；

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$。

12．一重物$\boldsymbol{P}$用绳子系在钉上，以水平力$\boldsymbol{F}$将$\boldsymbol{P}$推出，使绳子与铅直方向成45°角，略去绳子的重量，试计算$\boldsymbol{F}$的大小及绳子的张力$\boldsymbol{T}$。

13．试用矢量方法证明：顺次连接任一四边形各边的中点，所得的四边形是平行四边形。

14．静水中的船速为10×10^3米/小时。（1）如果欲横渡

一河，已知水速为6×10^3米/小时，问船行驶的方向和速度的大小应如何？（2）如果船垂直于水流方向行驶，问船前进的路线和速度又如何？

15. 试用矢量方法证明三角形的中位线定理。

16. 证明梯形的中线平行于底边，且等于两底之和的一半。

17. 三角形ABC的重心为P，设O为任意一点，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。求$\overrightarrow{OP}$。

18. 在矢量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$上作梯形$OACB$，其中$BC\parallel OA$，$BC=\frac{1}{2}OA$，又$M$和$N$分别是梯形上底$BC$和下底$OA$的中点，试用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{MN}$。

19. 在三角形ABC的三边AB、BC和CA上，分别向外作平行四边形$ABDE$，$BCFG$和$CAHK$。证明：三矢量$\overrightarrow{DG}$、$\overrightarrow{HE}$及$\overrightarrow{FK}$可以组成一三角形。

20. 一人以15公里/小时的速度朝南行走，观察到风向来自正西；他把行走速度增加到25公里/小时，观察到风向来自西南。求风向和风速。

§1.3 数乘矢量

一、数与矢量的积

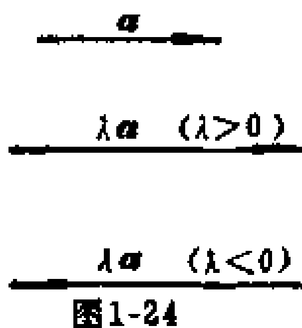


图1-24

任一实数λ与矢量$\boldsymbol{a}$相乘，其积是一矢量，记作$\lambda\boldsymbol{a}$。它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$；它的方向是这样的：当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$的方向相同，$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$的方向相反（图1-24）。这种由$\lambda$和$\boldsymbol{a}$得到$\lambda\boldsymbol{a}$的运算，叫做

数与矢量的乘法，简称数乘矢量。显然，矢量$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$是平行矢量，它们是共线的。

在特殊情况下，例如，若$\lambda=0$，则乘积是零矢量；若$\lambda=-1$，则得到原矢量的逆矢量。

由以上讨论可知，任一矢量与实数相乘后，所得的新矢量仍与原矢量共线。与此相反的一个问题是：如果两个矢量共线，我们是否能将其中某一矢量写成另一矢量与一实数的乘积？对于这个问题，下面的定理给出了肯定回答。

定理1.1 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是共线矢量，且$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，则必存在唯一的实数λ，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

证 若$\boldsymbol{b}$是零矢量，则$|\boldsymbol{b}|=0$，由$|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，有$0=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，因为$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，于是实数$\lambda$必为零。以下考虑$\boldsymbol{b}$为非零矢量。

实数$\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$。这里有两种情况：

（1）如果$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向，则取正号，$\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$。此时$\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}$的方向相同（$\lambda>0$），模也相等。事实上，有

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

（2）如果$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向，则取负号，$\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$。此时$\boldsymbol{b}$也与$\lambda\boldsymbol{a}$同向（$\lambda<0$），模亦相等。即上式同样成立。因此，由以上的讨论可得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

由于两已知矢量的模的比值是唯一确定的，所以，实数λ是唯一的。

根据以上的定理及数乘矢量概念，可以得到下面的重要推论。

推论1 两个矢量共线的充要条件是其中一矢量等于另一矢量乘一实数。

推论2 任一非零矢量$\boldsymbol{a}$，等于它的模与一个和它同向的单位矢量之积，即

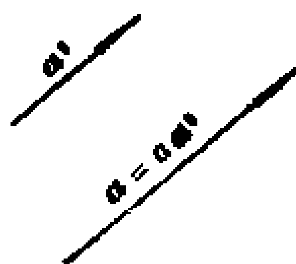


图1-25

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

该式是矢量的解析表示，在矢量运算中有着广泛的应用。它表明，任一非零矢量$\boldsymbol{a}$可以分为两部分：其中$|\boldsymbol{a}|$是矢量$\boldsymbol{a}$的模，表示$\boldsymbol{a}$的大小；$\boldsymbol{a}^0$是单位矢量，表示$\boldsymbol{a}$的方向（图1—25）。将上式改写为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

该式表明，单位矢量$\boldsymbol{a}^0$等于矢量$\boldsymbol{a}$与其模$|\boldsymbol{a}|$的商，或者等于$\boldsymbol{a}$与其模$|\boldsymbol{a}|$的倒数之积。

单位矢量用来确定空间的方向。

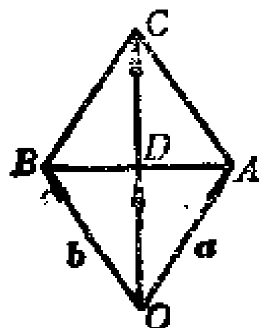


图1-26

例1.8 菱形$OACB$，对角线的交点为D（图1-26），设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。求$\overrightarrow{OD}$。

解 菱形是四边等长的平行四边形，因为D是对角线的交点，则有

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

例1.9 设M为线段AB所在直线上的一点，又$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$（实数$\lambda\neq-1$）。证明对于任一点$O$，有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$

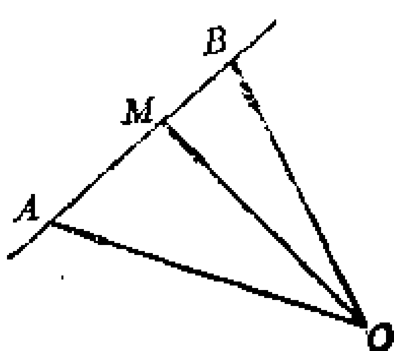


图1-27

证 如图1-27所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

由已知条件：

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}，\text{则}$$

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

所以

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$

二、 数乘矢量的性质

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为矢量，λ、μ为实数。

1．满足结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a} \qquad (1\text{-}1)$$

2．满足对于数的分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \qquad (1\text{-}2)$$

3．满足对于矢量的分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \qquad (1\text{-}3)$$

对于这三条性质，只要证明各等式两边矢量的模相等、方向相同即可。因此，根据以上的讨论可知，式(1-1)显然成立。

证(1-2)　若λ、μ中至少有一个是零，或$\boldsymbol{a}=0$时，式(2)显然成立。现设$\boldsymbol{a}\neq 0$，于是按照λ、μ的正负，共有四种可能的情形。我们只考虑$\lambda>0$、$\mu>0$这种情形。

式(1-2)两边矢量的模分别是：

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|$$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|;$$

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|$$

所以它们的模相等。

另一方面，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$、$\lambda\boldsymbol{a}$和$\mu\boldsymbol{a}$这三个矢量显然都与矢量$\boldsymbol{a}$共线，因而它们的方向相同。所以式(1-2)成立。

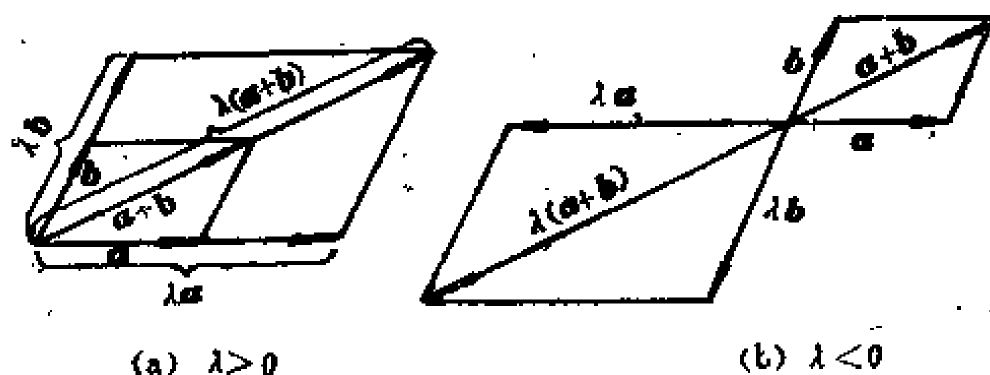
考虑到各矢量都与$\boldsymbol{a}$共线这一事实，故可利用作图法，对共他几种情形进行类似的讨论。

证(1-3)　若$\lambda=0$、或$\lambda=1$，或者$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$至少有一个是零矢量，那么式(1-3)显然成立。现设$\lambda\neq0$、$\lambda\neq1$，并且$\boldsymbol{a}\neq0$，$\boldsymbol{b}\neq0$，这时可以按$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是否共线，分为两种情况来讨论。

(i) 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线，则由定理1.1，有$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，于是得出

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]$$
$$=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

(ii) 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$不共线，这种情况可用平行四边形法则来证明。为此，取公共起点，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则从起点引出的对角线矢量就是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图1-28)。如果$\lambda>0$，则当以$\lambda$



(a) $\lambda>0$　　　(b) $\lambda<0$

图1-28

乘各矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$后，就得到一个与原平行四边形相似的平行四边形，并且$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$就是以$\lambda\boldsymbol{a}$和$\lambda\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的对角线矢量(图中(a))。如果$\lambda<0$，这时只是各矢量变为

相反的方向，而得到的仍是相似的平行四边形(图中(b))，于是有$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。所以式(3)成立。

例1.10 证明连结梯形两腰中点的线段，与连结两对角线中点的线段，其长度分别等于两底之和的一半及两底之差的一半。

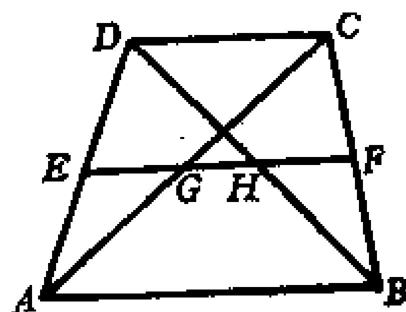


图1-29

证 设梯形$ABCD$，E、F和G、H分别是两腰和两对角线的中点(图1-29)。据矢量的加法法则，有

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$

相加，得

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$ ($\overrightarrow{EA}$和$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{CF}$和$\overrightarrow{BF}$互为逆矢量)

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$$

因为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$平行，且指向相同，所以矢量和$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$的模，等于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的模之和(即两底之和)。这就证明：两腰中点连线的长度等于两底之和的一半。

其次，从图1-29中容易看出，

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}$$
$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$$

相加，得

$$2\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$$ ($\because\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=0$，$\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{BH}=0$)

所以

$$GH=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$$

上式表明，两对角线中点连线的长度等于两底之差的一半。

三、 矢量等式及其变换

以上两节，我们讨论了矢量的两种基本运算，即矢量加减法和数乘矢量的规律。不难看出，这些运算所具有的性质，与普通代数式的运算性质完全类同。因此，凡涉及与这些性质有关的那些类似代数式的变换，例如去括号、移项、通分（分母为实数）、提取公因子、合并同类项①，以及等式两边同时加上（或减去）同一个矢量、或同时乘（或除）以同一个非零实数等各种运算，皆可一一施行。

现举两例如下。

例1.11 已知矢量等式

$$\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right]=\frac{1}{3}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$$

求矢量$\boldsymbol{x}$。

解 先将等式左边化简，得到$\frac{2}{3}\boldsymbol{x}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}$。于是变为

$$\frac{2}{3}\boldsymbol{x}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{x}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

去分母、移项及合并同类项后，得

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

例1.12 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为已知矢量，求解矢量方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{3}=\boldsymbol{a}\\(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=2\boldsymbol{b}\end{cases}$$

---

① 指矢量因子相同的项。

解 原方程组经化简后变为

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=6\boldsymbol{a} & ① \\ -\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{b} & ② \end{cases}$$

②×5+①，得

$$16\boldsymbol{y}=6\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{y}=\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}\boldsymbol{b} \qquad ③$$

将③代入②，得

$$\boldsymbol{x}=\frac{9}{8}\boldsymbol{a}-\frac{1}{8}\boldsymbol{b}$$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\frac{9}{8}\boldsymbol{a}-\frac{1}{8}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y}=\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{5}{8}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

由此可知，凡是用等号连接、且含有若干个矢量的关系式，叫做矢量等式。而含有未知矢量的等式，则叫做矢量方程。当未知矢量取某个矢量后，能使方程两边相等时，那么这个矢量就叫做该方程的解。同样地，对矢量方程组及其解可作类似的理解。

例1.13 $ABCD$为一任意四边形，有两个力作用于顶点A，另外两个力作用于顶点C，它们分别以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$及$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CD}$表示（图1-30）。证明这个力系的合力等于该四边形两对角线中点的连线矢量的四倍，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{GH}$$

其中G、H分别为对角线AC、BD的中点。

证 取$ABCD$平面外任一点O，则有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$$

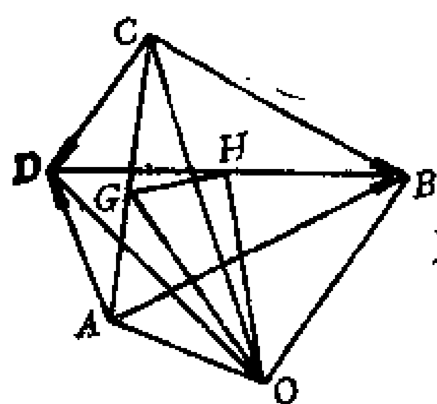


图1-30

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$

又

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$
$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$
$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) \quad ①$$

而

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\\&=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\&\quad+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\\&=2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) \quad ②\end{aligned}$$

比较①和②，于是得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{GH}$$

习　题

1. 两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 应具有什么特点，才满足关系式 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$。

2. 若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，问 $\frac{\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0}{\sqrt{2}}$ 是怎样的矢量？

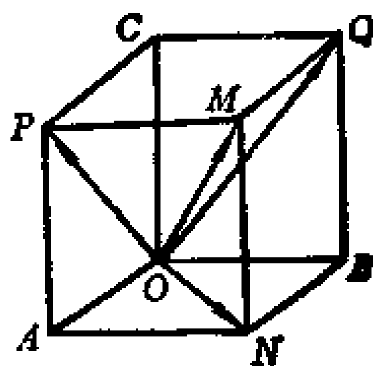
3. 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 应具有什么性质，下列关系式才成立？

（1） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； （$\lambda$ 为实数）

（2） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ $\quad |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$

4. 证明当 $\lambda<0$、$\mu<0$ 时，数乘矢量的结合律成立，即 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$。 （$\lambda$、$\mu$ 为实数）

5. 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的图形；若 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$。



第 6 题图

6. 长方体 $OANB$-$CPMQ$（见题图）。在其顶点 O 施力 $\overrightarrow{ON}$、$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$。证明其合力等于 $2\overrightarrow{OM}$。

7. 三角形 ABC，设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若 BC 边被 D 分成 $BD:DC=m:n$，AC 边被 E 分成 $AE:EC=m:n$。

证明： $\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BA}$。

8. 解矢量方程组

$$\begin{cases}3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\ 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$$

求矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。

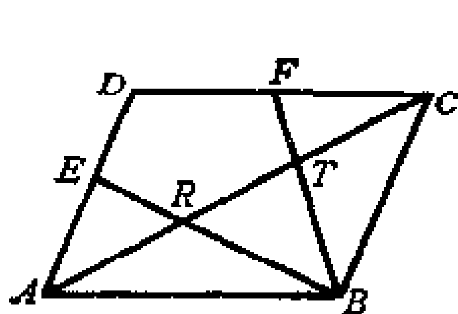
9. 证明平行四边形的对角线互相平分。

10. 设 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 是互相垂直的单位矢量，计算

$$\left|\boldsymbol{i}-\frac{2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})}{5}\right|。$$

11. 四边形 $ABCD$．$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 为不共线矢量。证明：$ABCD$ 是梯形。

12. 设 $ABCD$ 为任一平行四边形，E、F 分别为 AD 和 CD 的中点。证明 BE 和 BF 三等分 AC。



第12题图

[提示：令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{r}$，$\overrightarrow{AT}=\boldsymbol{t}$。利用矢量运算方法，可得$\boldsymbol{r}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，其余类推]

§1.4 矢量的分解

一、概述

在许多实际问题中，我们常常会遇到另一类与矢量加法相反的问题，即对于一给定的矢量，如何将它分解成若干个分矢量之和，这个问题在力学中甚为重要。

所谓矢量分解，就是按照已知条件，将矢量分解为合成这个矢量的分矢量的运算方法。众所周知，为使分解具有确定结果，必须对这种运算附加一定的条件。

矢量分解是矢量合成或矢量加法的一种逆运算。

矢量分解与矢量减法的区别在于：在矢量减法中，已知的是合矢量及一分矢量，而要求得另一分矢量；对于矢量分解，完全给定的是合矢量的大小和方向，至于分矢量，则须由具体条件来确定。

一般说来，我们是将一矢量分解为与给定的一组矢量分别共线的若干分矢量之和。

二、平面上矢量的分解

如果给定平面上两个非零的共线矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，若该平面上任一矢量$\boldsymbol{s}$能分解成分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线的两个分矢量$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$。则

根据定理1-1，有

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{s}_1=m\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{s}_2=n\boldsymbol{b}(\lambda、m、n\text{为实数})$$

则
$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(m+n\lambda)\boldsymbol{a}$$

上式表明：$\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{b}$）共线，这与 $\boldsymbol{s}$ 为任意矢量的假设矛盾。由此可见，对平面上任意一矢量来说，并不都能分解成与给定的一组共线矢量分别共线的分矢量之和。

现设在平面上给定两个不共线矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，要将该平面上任一矢量 $\boldsymbol{s}$ 沿 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两个方向进行分解。为此，将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 放置在同一起点 O（图1-31），设它们的终点分别是 A、B 和 C。过点 C 作直线 OA、OB 的平行线，交点分别为 M 和 N，于是得平行四边形 $OMCN$。则

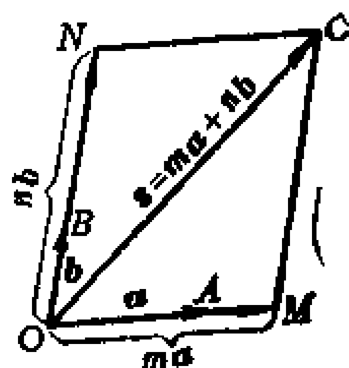


图1-31

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$

因为 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$ 分别与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线，根据定理1-1，必存在唯一的两个实数 m、n，使得

$$\overrightarrow{OM}=n\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{ON}=n\boldsymbol{b}$$

所以

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$
$$=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b} \tag{1}$$

以下证明，这样的分解是唯一的，即 m 和 n 是唯一确定的。我们用反证法，假定还有另一种分解形式：

$$\boldsymbol{s}=m'\boldsymbol{a}+n'\boldsymbol{b} \tag{2}$$

其中 m'、n' 是与 m、n 不完全相同的实数。不妨设 $m'\neq m$，即 $m-m'\neq 0$。

由式（1）和式（2），有

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=m'\boldsymbol{a}+n'\boldsymbol{b}$$

于是得

$$\boldsymbol{a}=\frac{n'-n}{m-m'}\boldsymbol{b}$$

由于$m-m'\neq 0$，$\frac{n'-n}{m-m'}$是实数，因而$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，这与题设矛盾，所以必有$m'=m$。同理可得$n'=n$。这就证明了上述的分解是唯一的，实数m、n由矢量$\boldsymbol{s}$唯一确定。

一般说来，若两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，则

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

就叫做矢量$\boldsymbol{s}$对于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的分解式。$m\boldsymbol{a}$、$n\boldsymbol{b}$叫做$\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$方向的分矢量。m、n叫做$\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$方向的分量。

若矢量$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$中的一个，例如$\boldsymbol{a}$共线，则分解式显然是：

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}$$

综合以上讨论的结果，可写成如下的定理。

定理1.2 若已知平面上两个不共线矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，则对该平面上任一矢量$\boldsymbol{s}$来说，必可分解为分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线的两矢量之和，即

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}\qquad(m、n为实数)$$

并且这种分解是唯一的。

综上所述，我们可以看出，如果空间中三个矢量$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面，则一定能找到其中某一矢量对另外两个矢量的分解式；反过来说，若$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$成立，则根据矢量加法的平行四边形法则，$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$三个矢量必定共面。因此有以下的推论。

推论 三个非零矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{s}$共面的充要条件是

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}\qquad(m、n为实数)$$

例1.14 在三角形ABC中，BC边被D分为$m:n$，试求矢量$\overrightarrow{AD}$对于$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的分解式。

解 如图1-32所示。过 D 分别作AB、AC的平行线，且与AB、AC分别交于B_1，C_1。根据已知条件 $BD : DC = m : n$，有

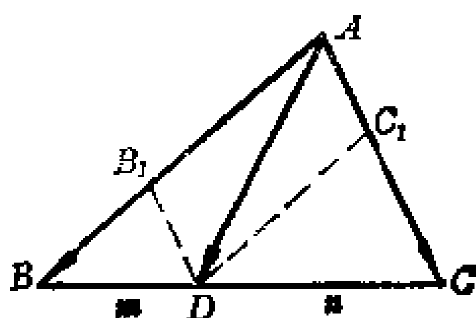


图1-32

$$B_1B : AB_1 = m : n,$$

$$C_1C : AC_1 = n : m$$

则

$$AB_1 : AB = n : (m+n), \quad AC_1 : AC = m : (m+n)$$

所以

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC_1} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

由矢量加法的平行四边形法则，得

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

例1.15 证明满足 $r = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ 的三点 $A(\boldsymbol{a})$、$B(\boldsymbol{b})$和$R(\boldsymbol{r})$在同一直线上的充要条件是

$$m + n = 1 \qquad (\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}\text{为非共线矢量})$$

证 如图1-33所示。

必要性。若A、B、R三点在同一条直线上，则$\overrightarrow{AR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$与$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$为共线矢量，于是有

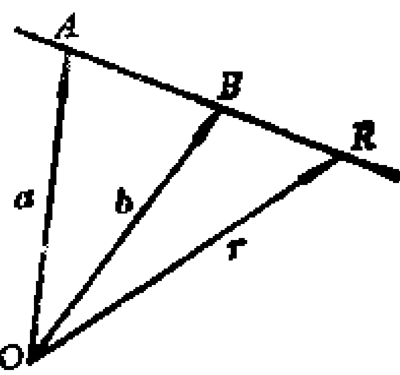


图1-33

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} = n(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + n(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (1 - n)\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$$

根据$\boldsymbol{r}$在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$方向分解的唯一性，可得

$$m = 1 - n$$

所以

$$m+n=1$$

充分性：由$m+n=1$，有

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-(m+n)\boldsymbol{a}$$
$$=n(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

因此$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$为共线矢量，又由于两矢量有共同的起点$A$，所以$A$、$B$、$R$必在同一直线上。

三、空间中矢量的分解

空间中的矢量可分为共面和不共面两种情形。由于一组共面矢量的和矢量必与各原矢量共面，因此，对于空间中任一矢量来说，就不一定能分解成与给定的一组共面矢量分别共线的分矢量。

现设在空间中给定三个不共面矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，要将空间中任一矢量$\boldsymbol{s}$沿$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个方向进行分解。为此，可将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{s}$置于同一起点O(图1-34)，设它们的终点分别是A、B、C和R。过R分别作与平面OBC、OAC、OAB平行的平面，并分别与直线OA、OB、OC交于M、N及P点，于是得到平行六面体。根据矢量加法及有关共线矢量定理1-1，有

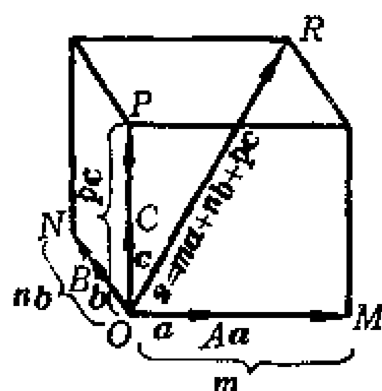


图 1-34

$$\overrightarrow{OM}=m\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{ON}=n\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OP}=p\boldsymbol{c}\ (m、n、p为实数)$$

而

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$$

所以

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c} \qquad (1)$$

这种分解是唯一的，即m、n和p是唯一确定的。如若不然，设还有另一种分解式：

$$\boldsymbol{s}=m'\boldsymbol{a}+n'\boldsymbol{b}+p'\boldsymbol{c} \qquad (2)$$

则

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}=m'\boldsymbol{a}+n'\boldsymbol{b}+p'\boldsymbol{c}$$

设$m'\neq m$，即$m'-m\neq 0$，于是得

$$\boldsymbol{a}=\frac{n'-n}{m-m'}\boldsymbol{b}+\frac{p'-p}{m-m'}\boldsymbol{c}$$

这里$\frac{n'-n}{m-m'}$和$\frac{p'-p}{m-m'}$都是实数，因此，根据定理1-2的推论，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三矢量必定共面，而这与题设矛盾。所以有$m'=m$，同理可得$n'=n$，$p'=p$。因此，这种分解是唯一的，实数m、n、p由$\boldsymbol{s}$唯一确定。

一般说来，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$不共面，则

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}$$

就叫做矢量$\boldsymbol{s}$对于矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的分解式。$m\boldsymbol{a}$、$n\boldsymbol{b}$、$p\boldsymbol{c}$叫做$\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$方向的分矢量。m、n、p叫做$\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$方向的分量。

综合以上讨论的结果，可得到如下的定理。

定理1.3 若已知空间中三个不共面矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，则对空间中任一矢量$\boldsymbol{s}$来说，必可分解为分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共线的三矢量之和，即

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c} \qquad (m、n、p\text{为实数})$$

并且这种分解是唯一的。

不难证明，对于在空间中给定的四个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{s}$，一定能找到其中某一矢量对另外三个矢量的分解式。由此得到如下的推论。

推论 在空间中给定四个矢量后，则其中至少有一矢量

可以对另外三个矢量进行分解。

以上我们讨论了平面上和空间中矢量的分解，以及分解的唯一性等问题。所得到的结论甚为重要，可以用来解决许多实际问题，同时也是以后要讨论的坐标理论的基础。

例1.16 平行六面体$ABCD$-$EFGH$(图1-35)，M是平行四边形$EFGH$两对角线的交点。试求矢量$\overrightarrow{AM}$对矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AE}$的分解式。

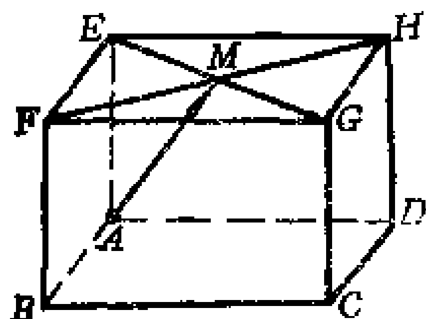


图1-35

解 由矢量加法，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}$$

因为M是两对角线的交点，则

$$FM=MH$$

$$EM=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$

所以得

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$$

四、线性相关、矢量间的线性关系

在上述矢量分解的基础上，我们提出以下的概念。

1. 线性相关

定义 矢量$\boldsymbol{s}$叫做一组矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…、$\boldsymbol{f}$的一个线性组合，如果有一组实数m、n、p…、q，使

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\cdots+q\boldsymbol{f}$$

成立。

定义 如果对于一组矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$…、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$，有一组不全为

零的实数m、n、p、…、q、r，使

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\cdots+q\boldsymbol{f}+r\boldsymbol{s}=0$$

成立。则这一组矢量叫做线性相关，否则，就叫做线性无关。

根据上述定义，我们容易看出，如果一组矢量是线性相关的。那么其中至少有一个矢量是其余矢量的一个线性组合；反之，如果一个矢量是一组矢量的一个线性组合，那么它们一定是线性相关的。

事实上，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$线性相关，则有

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\cdots+q\boldsymbol{f}+r\boldsymbol{s}=0 \qquad (*)$$

其中m、n、p、…、q、r不全为零。不妨设$r\neq0$，于是有

$$\boldsymbol{s}=(-\frac{m}{r})\boldsymbol{a}+(-\frac{n}{r})\boldsymbol{b}+(-\frac{p}{r})\boldsymbol{c}+\cdots+(-\frac{q}{r})\boldsymbol{f}$$

即$\boldsymbol{s}$是$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…、$\boldsymbol{f}$的线性组合。反之，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$中有一个，例如，$\boldsymbol{s}$是其余矢量的一个线性组合，即

$$\boldsymbol{s}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\cdots+q\boldsymbol{f}$$

经移项，且令$r=-1$，就得到式(*)。由于系数中$r\neq0$，所以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$线性相关。

将以上结论用定理表述如下：

定理1.4 n个矢量线性相关的充要条件是，其中的一矢量可以表示成其余$n-1$个矢量的线性组合。

例1.37 若

$$(2x+y-3)\boldsymbol{a}+(2x-y-1)\boldsymbol{b}=0$$

试确定x和y的值，使矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性无关。

解 由上述定义可知，一组矢量若不线性相关，就称为线性无关。也就是说，这时矢量的系数全都为零。因此，有

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\2x-y-1=0\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2. 矢量间的线性关系

由定理1.4可知，两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性相关的充要条件，是其中一矢量是另一矢量的线性组合。例如$\boldsymbol{b}$，是$\boldsymbol{a}$的线性组合：

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$$

而据定理1-1的推论，上式就是$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线的充要条件。因此有

定理1.5 两个矢量线性相关的充要条件是它们共线。

对于任意三矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，由定理 1-4，它们线性相关的充要条件是

$$\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$$

而据定理1-2的推论，这正是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为共面矢量的充要条件。所以有

定理1.6 三矢量线性相关的充要条件是它们共面。

对于四个(或更多个)矢量，有以下的定理。

定理1.7 空间任意四个矢量总是线性相关的。

证 1) 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$为空间任意四个矢量。若其中有两个矢量，例如$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线，则据定理1.5，存在不全为零的实数m和n，使$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = 0$。而由

$$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + 0\cdot\boldsymbol{c} + 0\cdot\boldsymbol{d} = 0$$

所以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$线性相关。

2) 若其中有三个矢量，例如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面，则据定理1.6，存在不全为零的实数m、n和p，使

$$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c} = 0$$

则由

$$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c} + 0\cdot\boldsymbol{d} = 0$$

因此，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$线性相关。

3）若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$中任意三矢量，例如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$不共面，则按照定理1.3，有

$$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$$

亦即

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}+(-1)\boldsymbol{d}=0$$

其中$\boldsymbol{d}$的系数为-1，不等于零，故$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$线性相关。

根据以上所述，我们可以断定：若空间中三矢量是线性无关的，那么其中任一矢量或者任两矢量也必定线性无关。

从几何上看，这个问题就是指已知的三矢量不共面。由此可知，它们中每一矢量都不可能是零矢量（这是因为，任一包含零矢量的一组矢量，必定线性相关），而且两两皆不共线。

例1.18 设$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为单位立方体边上的矢量，即$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$。三边的对角线矢量为$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{c}$。试将矢量$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$写成$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的线性组合。

解 如图1-36所示。有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

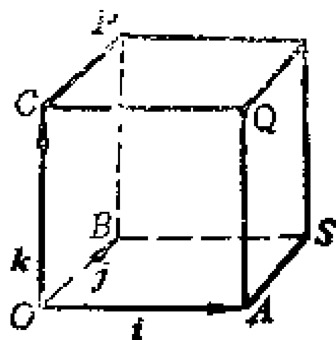


图1-36

将以上各式代入

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$$

则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\lambda(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\mu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\nu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\\&=(\mu+\nu)\boldsymbol{i}+(\lambda+\nu)\boldsymbol{j}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

例1.19 已知矢量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，其中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不共面。若$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，问$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$是

否共面？

解 因为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，故若存在实数m和n，使得

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

成立，那么$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面。现只须求得这两个实数m和n即可。

由

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(2m+2n)\boldsymbol{i}+(-3m+3n)\boldsymbol{j}+(3m+2n)\boldsymbol{k}$$

又

$$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

令

$$\begin{cases}2m+2n=2 & ①\\ -3m+3n=-9 & ②\\ 3m+2n=4 & ③\end{cases}$$

解式②和式③，得$m=2$，$n=-1$，代入式(1)满足。因而有

$$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

所以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面。

习　　题

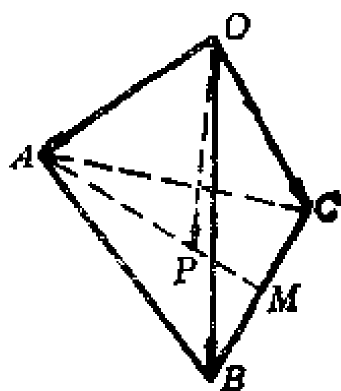
1. 设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$OM$为三角形$OAB$的中线，试将$\overrightarrow{OM}$沿$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$分解。

2. 已知矢量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3$，其中$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$为不共面的单位矢量。问$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$是否共线？

3. 已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$。问矢量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$共面否？如果共面，写出它们的线性关系式。

4. 四面体O-ABC，设P为底面ABC的重心(见题图)。求矢量$\overrightarrow{OP}$对矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OC}$的分解式。

5. 正六边形$OABCDE$，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{b}$。试分解$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$及$\overrightarrow{OD}$为沿$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的分矢量。（提示：取六边形中心$P$点）



第4题图

6. 设矢量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{e}_2$。证明：三个矢量共面，并求其线性关系$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$中的分量$m$和$n$。

7. 三角形ABC，设D、E是BC边的三等分点（$BD=DE=EC$）。求矢量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$对于矢量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的分解式。

8. 已知矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，设矢量$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$。证明矢量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$也不共线。并求$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$对$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$的分解式。

9. 若要使两个不共线矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$满足条件$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=0$，问$m$、$n$应是怎样的值？

10. 已知矢量$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$对于三个不共面矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的分解式为$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{s}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{t}=2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，问矢量$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$共面否？

11. 已知$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$沿三个不共面矢量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$的分解式为$\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{e}_1+n_1\boldsymbol{e}_2+p_1\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{b}=m_2\boldsymbol{e}_1+n_2\boldsymbol{e}_2+p_2\boldsymbol{e}_3$，若（1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线。问它们沿$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$方向的分量$m_1$，$n_1$，$p_1$和$m_2$，$n_2$，$p_2$之间应有什么关系？

12. 证明三角形三条中线互相分为1∶2之比。

第二章 矢量与坐标

矢量运算，并不依赖于坐标系的选择，用矢量形式能简单明瞭地表示出物理定律的基本内容。然而，在很多实际问题中，我们仍需选择一定的坐标系，以便在坐标系中讨论问题，这样会给矢量运算带来很多方便。

为此，本章引入坐标的概念，通过坐标系，建立起矢量与坐标——一组有序实数之间的联系，从而将矢量运算转化为实数运算。

§2.1 矢量的投影表示法

一、轴上矢量的代数量及两矢量间的夹角

1. 在任意一直线上，若取定其一个方向为正向，并用一单位矢量指出该正向。这种用单位矢量指出正向的直线叫做轴。用来表示正向的这个单位矢量，就叫做轴的单位矢量。我们约定，当给定一条轴时，它的单位矢量也就随之确定。

设$\boldsymbol{e}$为轴的单位矢量，那么轴上任一矢量[1] $\boldsymbol{a}$ 必定与 $\boldsymbol{e}$共线，即有

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e} \tag{2-1}$$

其中$\lambda=\pm|\boldsymbol{a}|$，它的正负是这样确定的：$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$同向时取正号，反向时取负号。实数 λ 叫做轴上矢量 $\boldsymbol{a}$的代数量。

---

①由共线矢量的定义可知，对任何与轴平行的矢量，都可将它放在同一轴上来讨论。

2. 两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，在由$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$决定的平面上，以任一点O为公共起点，则它们所在的两射线（指向与给定矢量一致）所组成的角θ（图2-1），就叫做这两矢量间的夹角，记作$\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$。一般规定，两矢量间的角限定在0与$\pi$之间，即$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

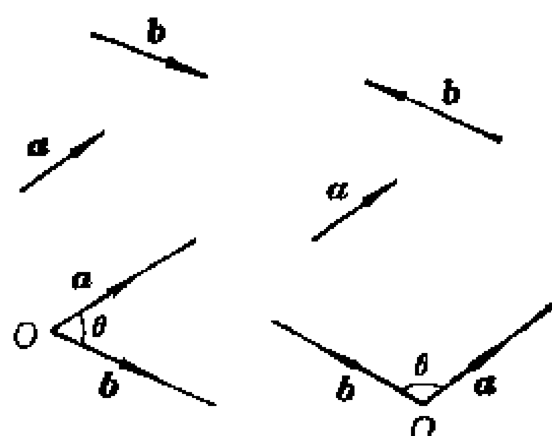


图2-1

由上述定义可知，两矢量间的夹角，实际上就是它们的方向间的角。因此，在一般情况下，我们并不区分两矢量的顺序，即认为夹角与两矢量的先后顺序无关①，所以有$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$。

若两矢量$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$的夹角为直角，$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$就叫做是互相垂直的，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$（或$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$）。若两矢量共线，则它们的夹角为0（同向时）或$\pi$（反向时）。

二、矢量在轴上的投影

1. 给定空间一点M，过M作轴l的垂直平面，则平面与轴l的交点M'叫做点M在轴l上的投影（图2-2）。显然，M'即为由M所引轴l的垂线的垂足。

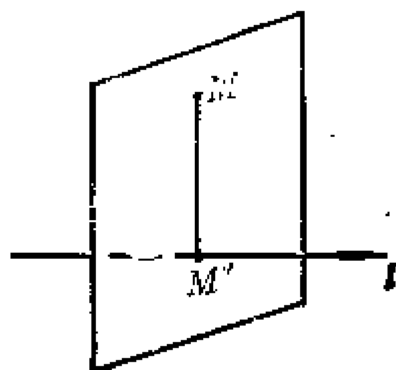


图2-2

2. 给定矢量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$及有向轴$l$，若矢量的起点$A$和终点$B$在$l$上的投影分别为点$A'$、$B'$，则线段$\overline{A'B'}$叫做矢量$\boldsymbol{a}=$

①对于平面上两矢量来说，其夹角一般指有向角，即与两矢量的顺序有关。习惯上，顺序为逆时针方向的两矢量间的夹角为正；反之，顺时针方向的夹角为负。这样就有$\langle a,b\rangle=-\langle b,a\rangle$。

$\overrightarrow{AB}$在轴l上的投影(图2-3)，记作

$$(\boldsymbol{a})_l=(\overrightarrow{AB})_l=\overline{A'B'}$$

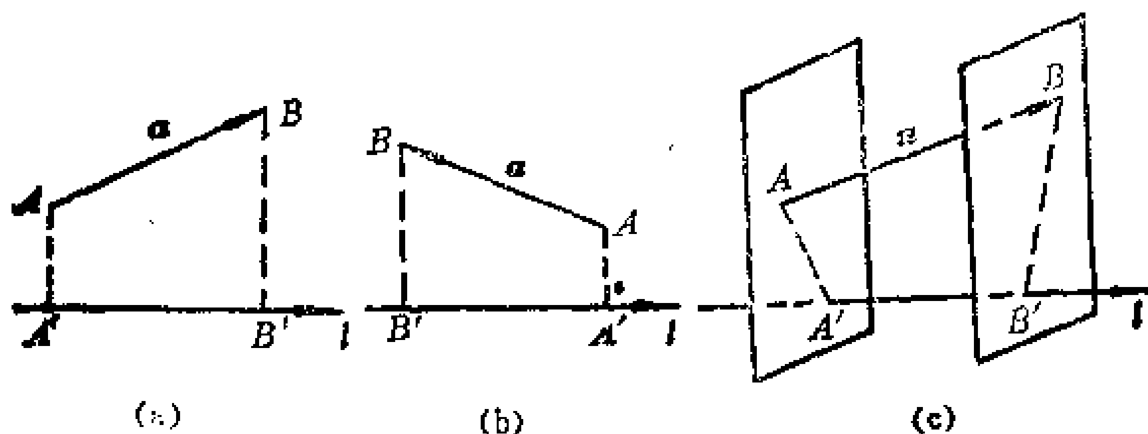


图2-2

若将两垂足A'与B'之间的有向线段，按一定顺序作出矢量$\overrightarrow{A'B'}$，称为投影矢量。由此可见，矢量$\overrightarrow{AB}$在轴上的投影即为投影矢量$\overrightarrow{A'B'}$在轴上的代数量$\overline{A'B'}$。于是不难得出：当投影矢量与给定轴的正向相同时(图2-3(a)、(c))，原矢量在轴上的投影为正；而当投影矢量与轴的正向相反时(图2-3(b))，则投影为负。

此外，由图2-3容易看出，(a)和(b)中的矢量$\boldsymbol{a}$与轴l共面，而(c)则为二者不共面的情况。

三、投影定理

定理2.1 任一矢量$\boldsymbol{a}$在轴l上的投影，等于$\boldsymbol{a}$的模与$\boldsymbol{a}$和l正向间夹角θ的余弦的乘积。即

$$(\boldsymbol{a})_l=|\boldsymbol{a}|\cos\theta \qquad (2\text{-}2)$$

证 设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\overline{A'B'}$为$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上的投影。过起点$A$作一与$l$平行的轴$l'$，且有相同的正方向(图2-4)，则$l$与$\overrightarrow{AB}$间的

夹角等于l'与$\overrightarrow{AB}$间的夹角θ。又设B''为l'与平面P的交点，有$\overline{BB''}\perp l$，因而B''就是点B在l'上的投影。由于$\overline{AA'}$和$\overline{B''B'}$都垂直于l，容易看出，$AA'B'B''$是一矩形，即有$\overline{AB''}=\overline{A'B'}$。所以，$\overrightarrow{AB}$在$l$和$l'$上的投影相等，即有

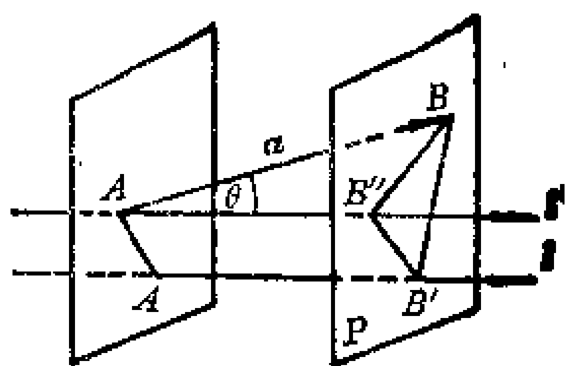


图2-4

$$(\overrightarrow{AB})_l=(\overrightarrow{AB})_{l'}$$

若θ为锐角，则$\overrightarrow{AB}$的投影矢量$\overrightarrow{AB''}$与l'同向，有$\overline{AB''}=|\overrightarrow{AB''}|$。由直角三角形$AB''B$，得

$$|\overrightarrow{AB''}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

所以

$$(\overrightarrow{AB})_l=(\overrightarrow{AB})_{l'}=\overline{AB''}$$
$$=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

即

$$(\boldsymbol{a})_l=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

若θ为钝角，此时$\overrightarrow{AB}$的投影矢量$\overrightarrow{AB''}$与l'反向，因而$\overline{AB''}=-|\overrightarrow{AB''}|$。于是

$$|\overrightarrow{AB''}|=|\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-\theta)=-|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

则

$$(\overrightarrow{AB})_l=(\overrightarrow{AB})_{l'}=\overline{AB''}=-|\overrightarrow{AB''}|$$
$$=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

所以，同样得到

$$(\boldsymbol{a})_l=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

我们知道，若两矢量相等，那么它们的模相等，方向亦相同，因而它们与任一轴的正向必交于等角。由此得到

推论1 相等的矢量对同一轴的投影相等。

对于任一实数λ与矢量$\boldsymbol{a}$之积$\lambda\boldsymbol{a}$的投影，根据定理2.1，有

$$(\lambda\boldsymbol{a})_l=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\theta'=|\lambda||\boldsymbol{a}|\cos\theta'$$

其中θ'为$\lambda\boldsymbol{a}$与轴l间的夹角。

当$\lambda>0$，有$|\lambda|=\lambda$，且$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向，则$\theta'=\theta$(θ为$\boldsymbol{a}$与l间的夹角)。而当$\lambda<0$，有$|\lambda|=-\lambda$，且$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向，则$\theta'=\pi-\theta$。显然，在这两种情况下，都能得出

$$(\lambda\boldsymbol{a})_l=\lambda(\boldsymbol{a})_l=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta \tag{2-3}$$

于是可得以下的推论：

推论2 数乘矢量之积在轴上的投影，等于该矢量在轴上的投影乘以同一实数。

定理2.2 矢量和在轴上的投影等于各矢量在同一轴上的投影之和。即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\cdots)_l=(\boldsymbol{a})_l+(\boldsymbol{b})_l+(\boldsymbol{c})_l+\cdots \tag{2-4}$$

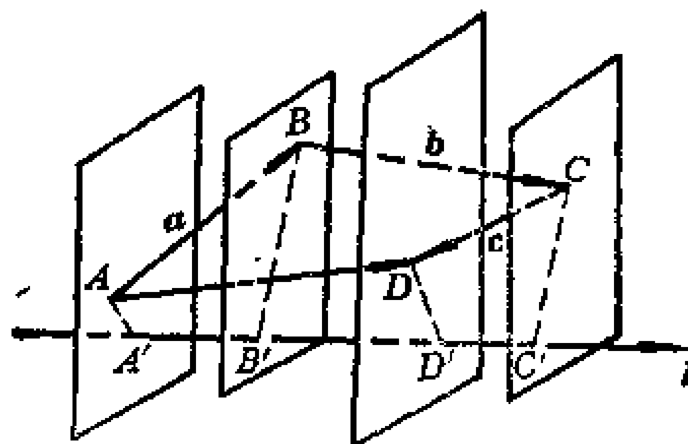


图2-5

证 设空间中有给定矢量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$、$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$(图2-5)。按矢量加法法则得出各矢量之和

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

且各矢量在轴l上的投影为

$$(\boldsymbol{a})_l = \overline{A'B'}, (\boldsymbol{b})_l = \overline{B'C'}, (\boldsymbol{c})_l = -\overline{C'D'}$$

$$(\overrightarrow{AD})_l = \overline{A'D'}$$

但

$$\overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} - (\overline{C'D'})$$

所以

$$(\overrightarrow{AD})_l = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_l$$
$$= (\boldsymbol{a})_l + (\boldsymbol{b})_l + (\boldsymbol{c})_l$$

例2.1 证明三角学中的射影定理：

$$a = b\cos C + c\cos B;$$
$$b = a\cos C + c\cos A;$$
$$c = a\cos B + b\cos A。$$

其中a、b、c及A、B、C分别表示三角形ABC的三条边及对角（图2-6）。

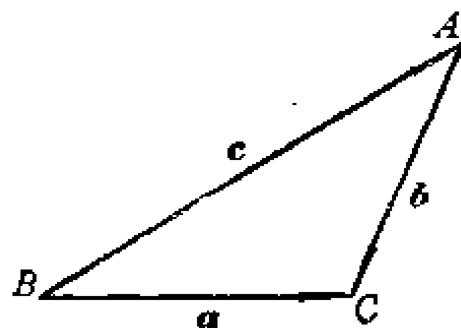


图2-6

证 令$\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$，则有$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。取$\boldsymbol{a}$为投影轴，根据定理2.2，有

$$(\boldsymbol{a})_a = (\boldsymbol{b})_a + (\boldsymbol{c})_a$$

于是

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + |\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$$

所以

$$a = b\cos C + c\cos B$$

取$\boldsymbol{b}$为投影轴，得

$$(\boldsymbol{b})_b = (\boldsymbol{a})_b + (\boldsymbol{c})_b$$

$$|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle + |\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$$

于是有

$$b = a\cos C + c\cos A$$

再取$\boldsymbol{c}$为投影轴，有

$$(\boldsymbol{c})_c = (\boldsymbol{a})_c + (\boldsymbol{b})_c$$

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle + |\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\rangle$$

所以得

$$c = a\cos B + b\cos A。$$

习　　题

1．在下面三种情况中，空间中n个非零矢量所组成的折线是否一定是封闭的？

（1）矢量和在一条轴上的投影为零；

（2）矢量和在两条相交轴上的投影都为零；

（3）矢量和在三条两两相交但不共面的轴上的投影都为零。

2．对于空间两个非零矢量，如果：

（1）在同一轴上的投影相等；

（2）在两条相交轴上的投影分别相等；

（3）在三条两两相交、但不共面的轴上的投影分别相等。

试问，这两矢量是否必为相等矢量？为什么？

3．设$\boldsymbol{c}_1$、$\boldsymbol{c}_2$、$\boldsymbol{c}_3$为同一平面上的三个矢量，已知

（1）　$\langle\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\rangle = \frac{\pi}{3}$，$\langle\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_3\rangle = \frac{3\pi}{4}$；

（2）　$\langle 3\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\rangle = \frac{\pi}{4}$，$\langle\boldsymbol{c}_1,-2\boldsymbol{c}_3\rangle = \frac{5\pi}{6}$；

（3）　$\langle\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\rangle = \frac{-2\pi}{3}$，$\langle-\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_3\rangle = \frac{3\pi}{4}$。

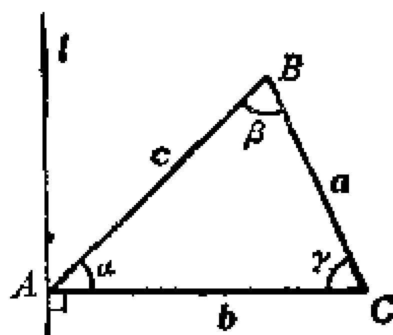
试求角$\langle\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3\rangle$。

4. 已知矢量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$,和$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-9\boldsymbol{e}_3$,其中$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$是空间三个互相垂直的单位矢量。(1)证明两矢量共线;(2)判定其中一矢量的模是另一个的几倍,并指出它们的方向是相同还是相反?

5. 已知三个矢量$\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2+8\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$;$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$。求矢量$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$在$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$方向的投影。

6. 若$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$。试求$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$间的夹角。

7. 三角形ABC的AC边与轴l垂直(如图),设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$。求$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AC}$在轴$l$上的投影;并证明$b=a\cos\gamma+c\cos\alpha$。



第7题图

8. 在平面上给定两矢量$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$。试求矢量$\boldsymbol{a}=9\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$对于矢量$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$的分解式。

9. 已知三个矢量$\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{t}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$。试求矢量$\boldsymbol{a}=11\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$对于$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$的分解式。

10. 若两矢量$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$和$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+y\boldsymbol{e}_3$共线,求$x$、$y$的值。

§2.2 矢量的坐标

一、直角坐标系

为了确定空间一点的位置,需要建立空间中的点与有序

实数之间的联系，这就需引用空间直角坐标系。

过空间一定点O，作三条互相垂直的轴——Ox、Oy、Oz，分别叫做x轴、y轴和z轴（或者，按照惯例，也可称为横轴、纵轴和竖轴），统称坐标轴。这样的三条坐标轴组成了一个空间直角坐标系，点O叫做坐标原点。

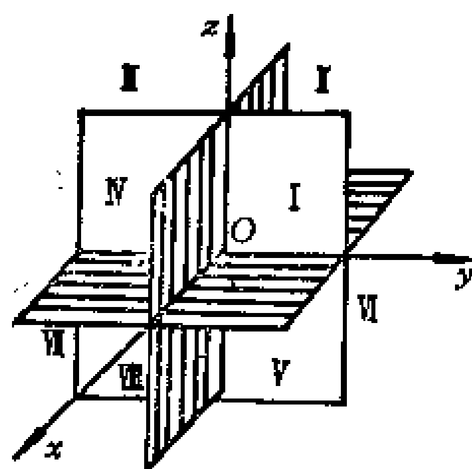


图2-7

通常，按照各坐标轴正向的不同配置，坐标系可分为右手系和左手系两类，前者坐标轴的正方向符合右手定则（图2-7）。今后除特别指明外，本书所给直角坐标系皆为右手系的。

如果将空间直角坐标系的竖坐标取为零，就得到一个平面直角坐标系（xoy平面）。可见，平面坐标系只是空间坐标系的特殊情况。

在空间直角坐标系中，每两条轴决定一个平面，例如x轴和y轴决定xoy面，这样就一共决定了三个互相垂直的平面——xoy，yoz和zox，统称为坐标面。三个坐标面将整个空间分为八个部分，每一部分叫做一个卦限。在xoy平面的上部，以三坐标轴正向为棱的那个卦限为Ⅰ卦限，按逆时针方向依次为Ⅱ、Ⅲ及Ⅳ卦限；在xoy平面的下部，在Ⅰ卦限下方的为Ⅴ卦限，并依次得Ⅵ、Ⅶ及Ⅷ卦限（图2-7）。

取定空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序实数之间的对应关系。

设M为空间中任意一点，过M作三个分别与三坐标轴垂直的平面，且与x轴、y轴和z轴的交点依次为P、Q、R，那么P、Q和R就是点M在三坐标轴上的投影（图2-8）。若这三点在三

轴上对应的值依次为x、y、z，则这一组有序实数(x,y,z)就依次叫做点M的横坐标、纵坐标和竖坐标，统称为点M的空间直角坐标，记作$M(x,y,z)$。

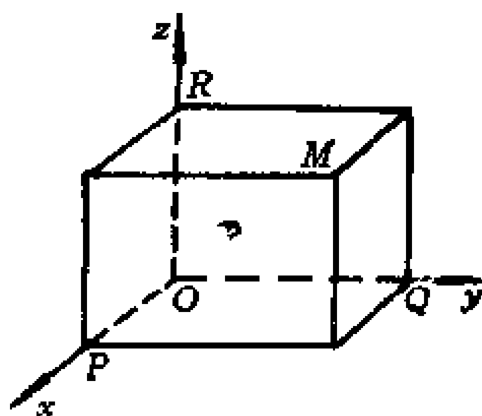


图2-8

这样，空间中一点M，就唯一确定了一个有序数组(x,y,z)；反之，给定了有序数组(x,y,z)，也就确定了与之对应的空间中的点M。因此，在空间直角坐标系中，空间中的点与有序数组是一一对应的。

二、矢量的坐标分解式

1．设给定空间中一点A，我们可以用一个特殊矢量来描述A点相对于给定坐标系原点的位置，它从原点O出发，指向所考虑的A点(图2-9)，这个特殊矢量叫做位矢(也就是A点相对于O点的矢径)，用$\boldsymbol{r}$表示，记作$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}$。前已述及，通常的矢量，例如象位移那样的真实的矢量，是与坐标系无关的。显而易见，对于空间中同一点的位置而言，它在不同坐标系中的位矢是不同的，这就表明，和通常的矢量不同，位矢$\boldsymbol{r}$依赖于坐标系。

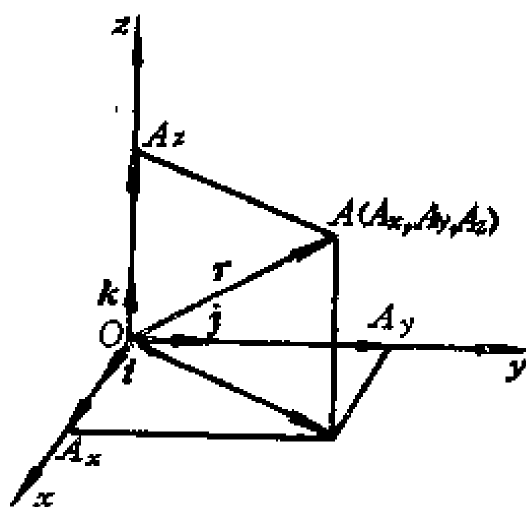


图2-9

以原点O为公共起点，在x、y、z三个坐标轴上，依次取单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，它们叫做基本单位矢量(或坐标矢量)。于是，由坐标原点O和基本单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就构成了空间中的一

个直角标架，记作$[O-\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$。

在图2-9中，从$\overrightarrow{OA}$矢端向xoy坐标面作垂线，自垂足再向x和y轴作垂线，将这两个垂足的x坐标和y坐标分别记作A_x和A_y；再自矢端向z轴作垂线，该垂足的z坐标记作A_z。于是，由空间一点与其坐标的对应关系、以及矢量在轴上投影的定义，$\overrightarrow{OA_x}$、$\overrightarrow{OA_y}$和$\overrightarrow{OA_z}$叫做位矢$\overrightarrow{OA}$在x、y和z轴的分矢量，而A_x、A_y和A_z则称为$\overrightarrow{OA}$在x、y和z轴的投影或分量，显然，A_x、A_y和A_z也是点A在相应轴上的坐标。这里应该指出，尽管投影或分量可以取正值或负值，但与分矢量是不同的，它们是标量而不是矢量。

据式(2-1)，有

$$\overrightarrow{OA_x}=A_x\boldsymbol{i};\ \overrightarrow{OA_y}=A_y\boldsymbol{j};\ \overrightarrow{OA_z}=A_z\boldsymbol{k}$$

由矢量的加法法则，得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{OA_y}+\overrightarrow{OA_z}$$

即

$$\boldsymbol{r}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \qquad (2\text{-}5)$$

根据定理1-3可知，位矢$\boldsymbol{r}$对基本单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的分解是唯一的，其中诸分量A_x、A_y和A_z由$\boldsymbol{r}$及$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$唯一确定。

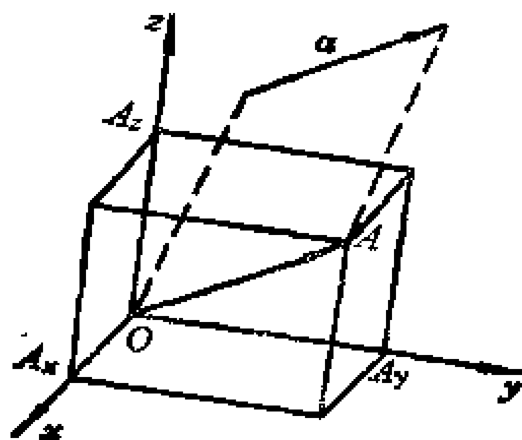


图2-10

2．考虑空间中任一矢量$\boldsymbol{a}$，由于矢量与起点无关，我们可以将$\boldsymbol{a}$的起点移到坐标原点O上，也就是作出$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$（图2-10）。据定理2-1的推论，矢量$\boldsymbol{a}$与位矢$\boldsymbol{r}$有相同的投影。于

是由式(2-5),得出

$$\boldsymbol{a}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \tag{2-6}$$

上式叫做矢量$\boldsymbol{a}$对于基本单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$的坐标分解式,可以简记为

$$\boldsymbol{a}=\{A_x,A_y,A_z\} \tag{2-7}$$

其中A_x、A_y和A_z就是$\boldsymbol{a}$在x、y和z轴的投影或分量,而$A_x\boldsymbol{i}$、$A_y\boldsymbol{j}$和$A_z\boldsymbol{k}$则是$\boldsymbol{a}$在x、y、z轴的分矢量。

由以上的讨论可知,空间中任一点的坐标,就是它的位矢在各坐标轴上的投影所对应的一组有序实数。当任一矢量$\boldsymbol{a}$的起点移到坐标原点时,则该矢量的投影或分量就是矢端A点的坐标。因此,对于给定的空间直角坐标系而言,位矢$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}$与其矢端$A$点是一一对应的。这种对应关系,通常可以表示为$A(\boldsymbol{r})$。显然,对于给定的一点$A(A_x,A_y,A_z)$,就有$\boldsymbol{r}=\{A_x,A_y,A_z\}$,反之也一样。

矢量的坐标分解式建立了矢量$\boldsymbol{a}$与有序实数组(A_x,A_y,A_z)的对应关系,这就使得我们可以通过实数组的代数性质,来说明矢量的几何性质;反过来,也可通过矢量的几何性质,来描述实数组的代数性质。因此,坐标分解式对矢量所起的作用,就象坐标对于点所起的作用一样。

例2.2 在边长为2的正三角形中,取一条边作为直角坐标系的x轴,而以这条边上的高线作为y轴。试求各顶点和各边中点的坐标。

解 如图2-11,取AB边的中点O为坐标原点,D、E分别为BC、CA边的中点。由于边长为2,故有

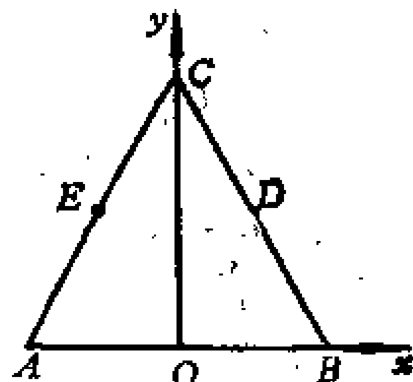


图2-11

$$\overrightarrow{OA} = -\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}、\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = 0\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\,\boldsymbol{j}\quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$$

所以得

$$A(-1,0),\ B(1,0),\ C(0,\sqrt{3}),$$

$$D\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), E\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), O(0,0)$$

三、用坐标分解法进行矢量运算

矢量运算，在引入矢量的坐标后，就摆脱了几何形式，而按实数的运算方式进行，从而就能用代数方法来研究几何问题。

1．用坐标分解法进行矢量的两种基本运算

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为两个已知矢量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

根据定理2-2及矢量加法法则，有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k} \quad (2\text{-}8)$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \quad (2\text{-}9)$$

又设λ为实数，则由定理2-1的推论 2 以及式(2-1)，有

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} \quad (2\text{-}10)$$

2．用坐标分解法计算几何问题

（1）关于空间任一矢量的坐标分量

设给定一空间矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，起点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点

$M_2(x_2, y_2, z_2)$，又设$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x, y, z\}$，引$M_1$、$M_2$的位矢$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$，且有$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$。由图2-12可知，

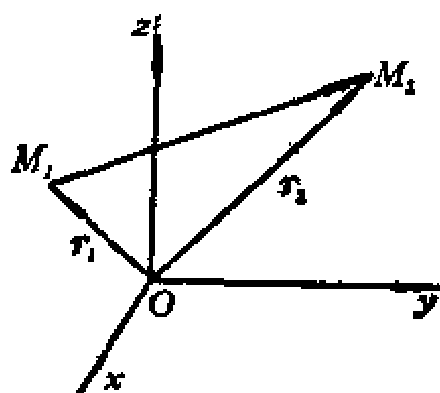


图2-12

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

所以得

$$\{x, y, z\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \tag{2-11}$$

即空间任一矢量的坐标分量，等于它的终点的坐标分量减去同名起点的坐标分量。

（2）关于线段M_1M_2的定比分点M的坐标

设给定两端点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，要将线段M_1M_2分为两段，使两段之比为定比$\lambda(\lambda \neq -1)$，即$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$。

设定比分点为$M(x, y, z)$，且M_1，M_2和M的位矢依次为

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$$

$$\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$$

参照第一章例1-9，可得位矢$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}$间的关系式：

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1 + \lambda} \tag{2-12}$$

利用式(2-8)及式(2-10)，求得分点M的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}。$$

3．用坐标分解法表示矢量间的线性关系

（1）空间两矢量平行的条件

根据定理1-1的推论1，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$两矢量平行的充要条件是存在一实数λ，使得

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b} \tag{2-13}$$

成立。将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$写成坐标分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

则有

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z \tag{2-14}$$

于是得

$$\frac{a_x}{b_x}==\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{2-15}$$

反之，由式(2-15)显然可得到式(2-14)，从而可以推得式(2-13)。于是根据定理1-1的推论1，$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是互相平行的。由此得出

定理2.3 两矢量平行的充要条件是它们的同名坐标分量成比例。

在以上定理的基础上，可以推得空间三点共线的条件。为此，给定三点：$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$和$C(x_3,y_3,z_3)$，并作矢量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$。则

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$$

显然，A、B、C三点共线与两矢量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$共线是等价的。因此，根据定理2.3，由$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$平行（共线）的充要条件，就可得出A、B、C三点共线的充要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \tag{2-16}$$

（2）空间三矢量共面的条件

定理2.4 空间三矢量

$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$、$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$、$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

共面的充要条件，是它们的坐标分量所组成的行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \tag{2-17}$$

证 据定理1.6，三矢量共面的充要条件是它们线性相关。即存在着不全为零的实数m、n和p，使得

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}=0$$

即

$$(mx_1+nx_2+px_3)\boldsymbol{i}+(my_1+ny_2+py_3)\boldsymbol{j}+(mz_1+nz_2+pz_3)\boldsymbol{k}=0$$

因为基本单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不共面，它们是线性无关的。于是由线性无关的定义，有

$$\begin{cases} mx_1+nx_2+px_3=0 \\ my_1+ny_2+py_3=0 \\ mz_1+nz_2+pz_3=0 \end{cases}$$

其中m、n、p不全为零，因而，上述关于m、n、p的齐次线性方程组有非零解存在。而根据线性方程组解的理论，该方程组有非零解m、n和p的充要条件，是它的系数行列式为零。于是得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

在以上定理的基础上，可以导出空间四点共面的条件。为

此，设空间四点

$$A(x_1,y_1,z_1);\quad B(x_2,y_2,z_2);$$
$$C(x_3,y_3,z_3);\quad D(x_4,y_4,z_4)$$

并作矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$：

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}$$
$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\}$$

显然，A、B、C、D四点共面与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$三矢量共面是等价的，而按照定理2.3，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2\text{-}18)$$

因此，式(2-18)也就是A、B、C、D四点共面的充要条件。

例2.3 将空间线段AB分成五等分，已知与端点A相邻的分点为$C(2,-1,4)$，与端点B相邻的分点为$F(-3,2,-5)$。试求两端点A与B的坐标。

解 设$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$。由题意可知，$AC:CF=1:3$，即定比$\lambda=\frac{1}{3}$，于是点C是分线段AF为定比$\frac{1}{3}$的点。根据式(2-12)，有

$$2=\frac{x_1+\frac{1}{3}(-3)}{1+\frac{1}{3}},\qquad -1=\frac{y_1+\frac{1}{3}(2)}{1+\frac{1}{3}}$$

$$4=\frac{z_1+\frac{1}{3}(-5)}{1+\frac{1}{3}}$$

经过简单计算，得到点A的坐标，

$$x_1=\frac{11}{3},\ y_1=-2,z_1=7$$

同理，再利用$CF:FB=3:1$，即将点B作为分线段CB为定比3的点，就可求得B点的坐标为

$$x_2=-\frac{14}{3},\ y_2=3,\ z_2=-8$$

例2.4 已知一平行四边形的三个顶点(1,1)、(2,2)、(3,-1)。求其第四个顶点。

解 设第四个顶点为(x,y)。若以$A(1,1)$、$B(2,2)$、$C(3,-1)$和$D(x,y)$的顺序构成平行四边形，则有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AC}$$

因为任一矢量的坐标分量，等于终点与起点的同名坐标之差，故可得

$$\overrightarrow{AB}=\{1,1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{2,-2\},$$
$$\overrightarrow{AD_1}=\{x-1,y-1\}$$

而

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=\{1,1\}+\{x-1,y-1\}=\{x,y\}$$

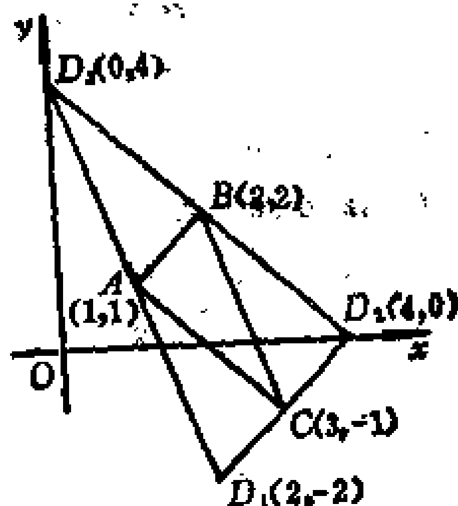


图2-13

即

$$\{x,y\}=\{2,-2\}$$

所以得

$$D_1(2,-2)$$

若以$A(1,1)$、$B(2,2)$、$D_2(x,y)$、$C(3,-1)$的顺序构成平行四边形，则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD_2}$$

$$\{1,1\}+\{2,-2\}=\{x-1,y-1\}$$

$$\{3,-1\}=\{x-1,y-1\}$$

即

$$x=4,\ y=0$$

所以有

$$D_2(4,0)$$

同理，若再以$A(1,1)$、$D_3(x,y)$、$B(2,2)$、$C(3,-1)$的顺序构成平行四边形，则得到$D_3(0,4)$

综上所述，所求平行四边形的第四个顶点为$(2,-2)$、$(4,0)$或$(0,4)$，共有三解。如图2-13所示。

例2.5 给定空间中四个矢量

$$\boldsymbol{a}=\{3,2,3\},\ \boldsymbol{b}=\{-5,-3,1\}$$

$$\boldsymbol{c}=\{4,5,-4\},\boldsymbol{d}=\{-8,-18,14\}$$

试求实数m、n和p，使得$m\boldsymbol{a}$、$n\boldsymbol{b}$、$p\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$构成封闭折线，并写出$\boldsymbol{d}$用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$表示的线性组合式。

解 由于$m\boldsymbol{a}$、$n\boldsymbol{b}$、$p\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$构成封闭折线，则有

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0 \quad ①$$

即

$$(3m-5n+4p-8)\boldsymbol{i}+(2m-3n+5p-18)\boldsymbol{j}+(3m+n-4p+14)\boldsymbol{k}=0$$

因为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不共面，故为线性无关。于是有

$$\begin{cases}3m-5n+4p-8=0\\2m-3n+5p-18=0\\3m+n-4p+14=0\end{cases}$$

解以上方程组，得$m=1,n=3,p=5$，代入式①，即得

$$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$$

四、矢量的模和方向余弦

模和方向是矢量的两个要素。既然可以通过坐标分解式来表示矢量，当然也就可以用坐标来描述矢量的模和方向。

1．矢量的模

设$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$为空间任一矢量，将其起点移到坐标原点，则有$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$（图2-14）。

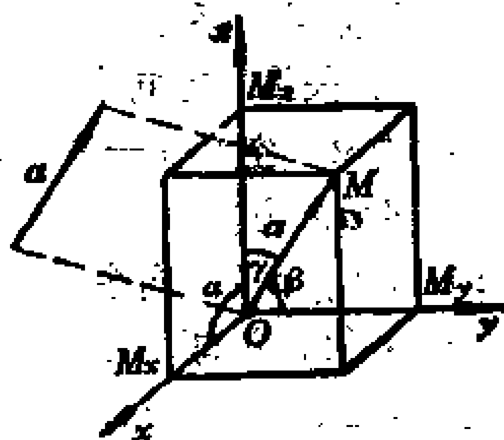


图2-14

在空间直角坐标系中，$\overrightarrow{OM}$就是以它在三坐标轴上的投影$\overline{OM}_x$、$\overline{OM}_y$和$\overline{OM}_z$为棱的长方体的一条对角线矢量。由勾股定理，有

$$|\overrightarrow{OM}|^2=\overline{OM}_x^2+\overline{OM}_y^2+\overline{OM}_z^2$$

而

$$\overline{OM}_x=x,\overline{OM}_y=y,\overline{OM}_z=z$$

则

$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2+z^2$$

于是得到矢量$\boldsymbol{a}$的模：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2\text{-}19)$$

若矢量$\boldsymbol{a}$的起点是$M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点是$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2\text{-}19\text{a})$$

在平面直角坐标系中(取Z坐标为零)，对于平面上任一矢量，可以相应地得到：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (2\text{-}20)$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2\text{-}20\text{a})$$

以上各式表明，在直角坐标系中，任一矢量的模，等于它的坐标分量的平方和的算术根。

2，矢量的方向余弦

定义 空间任一矢量$\boldsymbol{a}$与x、y、z轴正向间的夹角α、β和γ，叫做$\boldsymbol{a}$的方向角。而方向角α、β、γ的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$和$\cos\gamma$，叫做$\boldsymbol{a}$的方向余弦。

矢量的方向可以用方向角表示。为了唯一确定这些夹角起见，通常规定了α、β、γ所允许变化的范围：$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$。因此，如果给出了矢量的方向角，也就确定了矢量的方向。但是，用坐标分析法来计算方向角是比较复杂的，为此，可改用方向角的余弦来表示。由于方向角都限定在0和π之间，当方向余弦确定后，方向角显然就随之而定，从而也就确定了矢量的方向。

在图2-14中，根据投影定理2-1，有

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma \qquad (2\text{-}21)$$

再应用式(2-19)，就得到由模和坐标分量来表示的该矢量的方向余弦

$$
\begin{cases}
\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{cases}
\tag{2-22}
$$

显然，对于平面坐标系($z=0$)，有

$$
\begin{cases}
\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{cases}
\tag{2-22a}
$$

式(2-22)(或式(2-22a))就是矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦的坐标表示式。

由式(2-22)，可得

$$
\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{2-23}
$$

即空间任一矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦的平方和恒等于1。

由式(2-23)容易看出，矢量$\boldsymbol{a}$的三个方向角(或方向余弦)并不是相互独立的，只要给定任两个方向角(或方向余弦)，那么第三个方向角(或方向余弦)就随之而完全确定。

相应地，对于平面坐标系，由式(2-22a)可得

$$
\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1 \tag{2-23a}
$$

空间任一矢量$\boldsymbol{a}$可以通过它的模和方向余弦来表示，即由式(2-21)，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \{x, y, z\} \\
&= \{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, |\boldsymbol{a}|\cos\beta, |\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}
\end{aligned}
\tag{2-24}
$$

并由此得出

$$
\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}(=|\boldsymbol{a}|) \tag{2-25}
$$

对于平面矢量$\boldsymbol{a}$，相应有

$$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\beta\} \tag{2-24a}$$

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}(=|\boldsymbol{a}|) \tag{2-25a}$$

即矢量$\boldsymbol{a}$的坐标分量与其方向余弦成比例。据此，通常就把$\boldsymbol{a}$的坐标分量叫做$\boldsymbol{a}$的方向数。

因为$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，于是由式(2-24)，得出

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\} \tag{2-26}$$

同理，对于平面坐标系，相应为

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta\} \tag{2-26a}$$

这表明，空间(或平面上)任一单位矢量$\boldsymbol{a}^0$的坐标分量，等于它的方向余弦。

例2.6 若一空间矢量$\boldsymbol{a}$与三个坐标轴的夹角相等，即$\alpha=\beta=\gamma$。求它的方向余弦。

解 已知$\alpha=\beta=\gamma$，则由式(2-23)

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

有

$$3\cos^2\alpha=1,\text{即}\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

亦即

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

所以矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \text{或}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

例2.7 给定两矢量$\boldsymbol{a}=\{1,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4,2)$。试求矢量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模与方向余弦。

解 设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的方向角分别为$\alpha_1$、$\beta_1$；$\alpha_2$，$\beta_2$(图2-

15)。则有

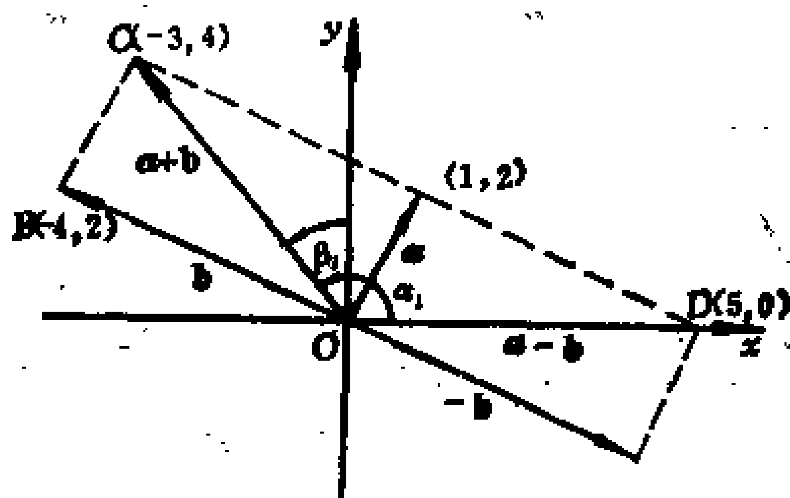


图2-15

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{-3,4\}$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{5,0\}$$

由式(2-20)，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模分别为

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+0^2}=5$$

又由式(2-22)，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的方向余弦分别为

$$\cos\alpha_1=\frac{x_1}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{5},\qquad \cos\beta_1=\frac{y_1}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{5},$$
$$\cos\alpha_2=\frac{x_2}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=1,\qquad \cos\beta_2=\frac{y_2}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=0$$

例2.8 已知一空间矢量$\boldsymbol{a}$的模为3，方向角$\alpha=\gamma=60°$，$\beta=45°$。求该矢量的坐标表示式。

解 按照题设，可得出方向余弦：

$$\cos\alpha=\cos\gamma=\cos60°=\frac{1}{2}$$
$$\cos\beta=\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由式(2-24)，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\boldsymbol{i}+|\boldsymbol{a}|\cos\beta\boldsymbol{j}+|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

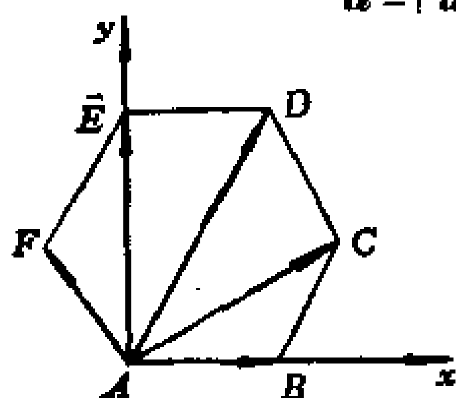


图2-16

所以得

$$\boldsymbol{a}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

例2.9 设$ABCDEF$为正六边形，边长为2，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{AF}$为作用于A点的力(图2-16)。试求诸力的合力的大小及方向。

解 取$\overrightarrow{AB}$向为x轴，$\overrightarrow{AE}$为y轴。设合力$R=\{x,y\}$，方向角为α，β。容易得出$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AD}|=4$。将各量沿坐标轴分解，根据定理2-2，有

$$x=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|\cos30^\circ+|\overrightarrow{AD}|\cos60^\circ$$
$$+|AE|\cos90^\circ-|AF|\cos60^\circ$$

$$=2+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}+0-1=6,$$

$$y=0+|\overrightarrow{AC}|\sin30^\circ+|\overrightarrow{AD}|\sin60^\circ$$
$$+|\overrightarrow{AE}|+|\overrightarrow{AF}|\sin60^\circ$$

$$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

则

$$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{x^2+y^2}=12(\text{单位})$$

又

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{R}|}=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{R}|}=\sqrt{3}/2$$

习　题

1. $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是怎样的单位矢量？若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，那么$\boldsymbol{a}$是不是单位矢量？

2. 判断以下各组矢量是否共线：

(1) $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}_1=-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{i}+0.5\boldsymbol{j}$；

(2) $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}_2=-\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$。

3. 矢量$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，指出在下列各种情况下，它的方向具有什么特点？

(1) $a_1=0$，$a_2\neq0$，$a_3\neq0$；

(2) $a_1\neq0$，$a_2\neq0$，$a_3=0$；

(3) $a_1\neq0$，$a_2=0$，$a_3\neq0$；

(4) $a_1=a_2=0$，$a_3\neq0$。

4. 将两点$M_1(1,-3)$和$M_2(4,3)$间的线段分成三等分，求分点的坐标。

5. 求下列各矢量的模和方向余弦：

(1) $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$，

(2) $\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$，

(3) $6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$。

6. 三个力$\boldsymbol{f}_1=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{f}_2=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{f}_3=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$同时作用于一点。求合力$\boldsymbol{f}$的大小和方向余弦。

7. 已知矢量$\boldsymbol{p}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{q}=\{-3,1,-2\}$，$\boldsymbol{r}=\{2,-2,1\}$。求矢量$\boldsymbol{a}=\{5,-2,3\}$对于$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$的分解式。

8. 若给定矢量$\boldsymbol{a}=\{3,5,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,2,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{4,-1,-3\}$。求下列各矢量的坐标分量：

(1) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,

(2) $\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$,

(3) $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$。

9. 证明：以$A(3,-1)$、$B(1,2)$、$C(-1,1)$和$D(3,-5)$为顶点的四边形是一梯形。

10. 已知两矢量$\boldsymbol{a}=\{-2,3,z\}$和$\boldsymbol{b}=\{x,-6,2\}$平行。求$x$和$z$。

11. 设给定三矢量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$。(1)分别求$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的模；(2)分别用单位矢量$\boldsymbol{a}^0$、$\boldsymbol{b}^0$及$\boldsymbol{c}^0$表示$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$。

12. 两力$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{f}_2=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$作用于同一点。问要用怎样的力才能与它们平衡？求此平衡力的大小和方向。

13. 设一矢量与x、y轴的夹角相等，而与z轴的夹角是前者的两倍。求该矢量的方向余弦。

14. 证明：以$A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$和$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形。

15. 证明三矢量$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$共面。并求$\boldsymbol{a}$沿$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$方向的分量。

16. 已知矢量$\boldsymbol{a}$的模$|\boldsymbol{a}|=2$，且它关于给定坐标系的三个方向角皆相等，试求$\boldsymbol{a}$的坐标分量。

17. 已知平行四边形的一个顶点$A(3,-1)$，且$\overrightarrow{AB}=\{-2,-1\}$，$\overrightarrow{AD}=\{-4,2\}$。试求(1)$B$、$C$、$D$点的坐标；(2)$AC$、$BD$的长度；(3)对角线$AC$和$BD$的交点$E$的位矢坐标分量。

18. 若已知矢量$\boldsymbol{a}$的方向角$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求另一方向角γ。又已知$\boldsymbol{a}$在x轴的投影为1，求$\boldsymbol{a}$的坐标表示式。

§2.3 坐标变换

以上两节我们讨论了空间的及平面的直角坐标系，这是坐标理论中的一个问题。我们知道，空间中(或平面上)点和矢量的坐标依赖于坐标系的选择。一般说来，同一个点或矢量，在不同的坐标系中会有不同的坐标。在某些实际问题中，为了更好的利用坐标的方法来解问题，常常需要将坐标系改变一下，这就是坐标变换的问题。那末，当从一坐标系改变成另一坐标系后，空间中(或平面上)任一点或矢量，对于新系(变换后的坐标系)和旧系(变换前的坐标系)的坐标之间究竟存在着怎样的关系，这是坐标理论中的另一个问题。为此，在建立不同的坐标系的基础上，我们要导出点和矢量在不同的坐标系中的代数表达式，从而找出它们在新旧坐标之间的联系。

现以平面直角坐标系为例，如图 2-17，要从一平面直角坐标系 $O\text{-}xy$ 变到另一平面直角坐标系$O'\text{-}x'y'$，这可以分两步走。第一步是先将原点移到点(a,b)处，而坐标轴的方向不变，即变为 $O'\text{-}x''y''$。第二步保持新原点不动，将整个坐标系旋转一个角度θ，这样就变到了$O'\text{-}x'y'$。因此，对于任何一个坐标变换，都可以将它分解为平移和旋转两步。以下主要讨论空间直角坐标系的坐标变换。先讨论平移，接下去是旋转，最后讨论一般的坐标变换问题。

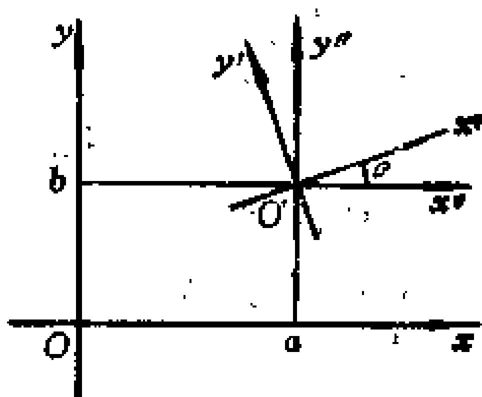


图 2-17

一、平移变换

对于空间中给定的一个直角坐标系，在保持坐标轴方向不变的条件下，将它移到一个新的位置（设原点由O点移到新原点O′），便得到一个新的直角坐标系。这种坐标系的变化，叫做平移变换，亦称移轴变换。

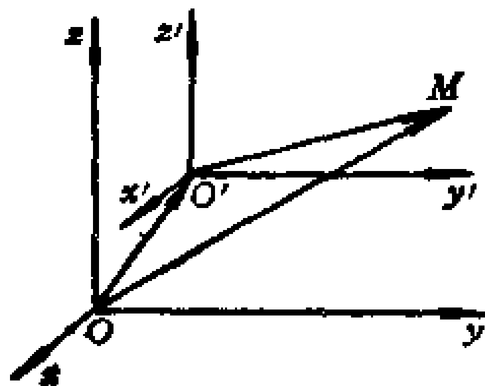


图 2-18

设旧坐标系为$O\text{-}xyz$，经平移变换后所得的新坐标系为$O'\text{-}x'y'z'$（图2-18），且新坐标系的原点O'在旧系下的坐标为(x_0, y_0, z_0)。给定空间中的一点M，它的新、旧坐标分别为(x', y', z')和(x, y, z)。容易看出，点M在新系和旧系中对应的位矢分别为$\overrightarrow{O'M}$和$\overrightarrow{OM}$，而$\overrightarrow{OO'}$则是新原点O'在旧系中对应的位矢。

利用矢量等式关系，有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{2-27}$$

显然，在平移变换下，新系和旧系中的基本单位矢量是相同的，都是$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。

于是得

$$\overrightarrow{OM} = x + y + z$$

$$\overrightarrow{OO'} = x_0 + y_0 + z_0$$

$$\overrightarrow{O'M} = x' + y' + z'$$

代入式（2-27），得出

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}) + (x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k})$$

$$= (x' + x_0)\boldsymbol{i} + (y' + y_0)\boldsymbol{j} + (z' + z_0)\boldsymbol{k}$$

对于相等的矢量来说，它们相应的坐标分量应相等，所以有

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad (2-28)$$

这就是在坐标系平移变换下，对于空间任一点M，用新坐标(x', y', z')表示旧坐标(x, y, z)的坐标变换式。

从式(2-28)解出x'，y'和z'，则得到

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases} \quad (2-28a)$$

这是在平移变换下，对空间一点M，用旧坐标(x, y, z)表示新坐标的坐标变换式。

我们把在空间直角坐标系的平移变换下，对于空间同一点的新、旧坐标间的变换式(2-28)和(2-28a)，统称为空间直角坐标移轴公式。

若取竖坐标z为零，用同样的方法，可以得到平面直角坐标移轴公式

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (2-29)$$

和

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (2-29a)$$

例2.10 设空间一点M在旧系$O\text{-}xyz$中的坐标是$(0, 2, -1)$，将$O\text{-}xyz$平移到新原点$O'(3, 1, -2)$处，求M在新系$O'\text{-}x'y'z'$中的坐标。

解 应用移轴公式(2-28a)，得

$$x' = 0 - 3 = -3$$

$$y' = 2 - 1 = 1$$

$$z' = -1 - (-2) = 1$$

所以点M在新系O'-$x'y'z'$中的坐标为$(-3,1,1)$。

二、旋转变换

对于空间中给定的一个直角坐标系，在保持其原点不动，以及坐标轴的顺序不变的条件下，将坐标系绕原点旋转一个角度，便得到一个新的直角坐标系。这种坐标系的变化叫做旋转变换（亦称转轴变换）。

将旧系记作O-xyz，基本单位矢量为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$；新系记作O-$x'y'z'$，基本单位矢量为$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$（图2-19）。设$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$对于旧系的方向角分别为：$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$；$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$；$\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$。它们之间的关系如表(2-1)所示。

表 2-1

新系 \ 旧系	$Ox(\mathbf{i})$	$Oy(\mathbf{j})$	$Oz(\mathbf{k})$
$Ox'(\mathbf{i}')$	α_1	β_1	γ_1
$Oy'(\mathbf{j}')$	α_2	β_2	γ_2
$Oz'(\mathbf{k}')$	α_3	β_3	γ_3

设空间中任一点M，它的新、旧坐标分别是(x',y',z')和(x,y,z)。我们要导出用新坐标x',y',z'表示旧坐标x,y,z的公式。为此，先按$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$来分解$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$。考虑到$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$都是基本单位矢量，由表2-1，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + \cos\beta_1 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_1 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + \cos\beta_2 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_2 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3 \boldsymbol{i} + \cos\beta_3 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_3 \boldsymbol{k} \end{cases} \tag{2-30}$$

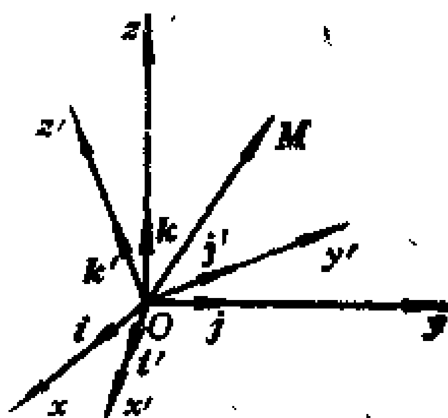


图 2-19

点M在新系和旧系中所对应的位矢都是$\overrightarrow{OM}$，对于旧系，有

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{2-31}$$

而对于新系则为

$$\overrightarrow{OM} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \tag{2-31a}$$

将式（2-30）的$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$代入上式，得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x'(\cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + \cos\beta_1 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_1 \boldsymbol{k}) \\ &\quad + y'(\cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + \cos\beta_2 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_2 \boldsymbol{k}) \\ &\quad + z'(\cos\alpha_3 \boldsymbol{i} + \cos\beta_3 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_3 \boldsymbol{k}) \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} \\ &\quad + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

而$\overrightarrow{OM}$对$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的分解是唯一的，所以由式（2-31），有

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases} \tag{2-32}$$

这就是在坐标系的旋转变换下，对于空间任一点M，用新坐标(x', y', z')表示旧坐标(x, y, z)的坐标变换式。

同理，若按$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$来分解$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \cos\alpha_1 \boldsymbol{i}' + \cos\alpha_2 \boldsymbol{j}' + \cos\alpha_3 \boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{j} = \cos\beta_1 \boldsymbol{i}' + \cos\beta_2 \boldsymbol{j}' + \cos\beta_3 \boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{k} = \cos\gamma_1 \boldsymbol{i}' + \cos\gamma_2 \boldsymbol{j}' + \cos\gamma_3 \boldsymbol{k}' \end{cases} \tag{2-33}$$

将式(2-31)与式(2-31a)加以比较后，应有

$$x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

以式(2-33)的$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$代入上式，有

$$\begin{aligned}x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'&=x(\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\alpha_2\boldsymbol{j}+\cos\alpha_3\boldsymbol{k})\\&\quad+y(\cos\beta_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\beta_3\boldsymbol{k})\\&\quad+z(\cos\gamma_1\boldsymbol{i}+\cos\gamma_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k})\\&=(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1)\boldsymbol{i}\\&\quad+(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2)\boldsymbol{j}\\&\quad+(x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

对于相等的矢量，其相应的坐标分量应相等，于是得

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1\\y'=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2\\z'=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3\end{cases}\tag{2-34}$$

这是在旋转变换下，对空间任一点M，用旧坐标$(x、y、z)$表示新坐标(x',y',z')的坐标变换式。

我们把在空间直角坐标系的旋转变换下，对于空间同一点的新、旧坐标系间的变换式(2-32)和(2-34)，统称为空间直角坐标转轴公式。

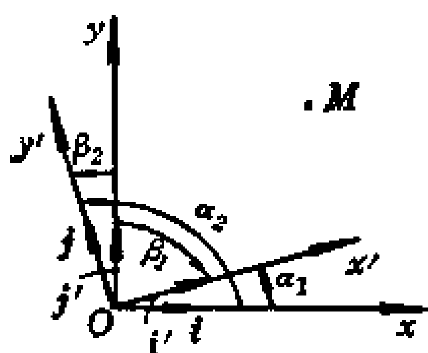


图 2-20

对于平面直角坐标系来说，在旋转变换下，由于点M的竖坐标为零(图2-20)，则由式(2-32)，得

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2\\y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2\end{cases}\tag{2-35}$$

前已述及，平面矢量的方向角，一般都采用有向角的规

定。由图(2-20)可知

$$\beta_1=\alpha_1-\frac{\pi}{2},\ \beta_2=\alpha_2-\frac{\pi}{2}$$

又

$$\alpha_1=\beta_2$$

取$\theta=\alpha_1$，将以上关系代入式(2-35)，经整理后得

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}\tag{2-36}$$

同理可得

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}\tag{2-36a}$$

以上两式，统称为平面直角坐标转轴公式。角θ叫做新系对于旧系的旋转角。

在平面直角坐标系的情况下，方向角之间的关系如下表：

表2-2

旧系 / 新系	$x(\mathbf{i})$	$y(\mathbf{j})$
$x'(\mathbf{i}')$	θ	$\theta-\frac{\pi}{2}$
$y'(\mathbf{j}')$	$\theta+\frac{\pi}{2}$	θ

顺便指出，在一些实际问题中，通常并不直接给出各个方向角，而是借助于矢量来确定新系的坐标轴方向，由此可求得这九个角的余弦，从而得到转轴变换公式。

例2.11 在空间直角坐标系中，若以三矢量

$$\boldsymbol{a}=\{1,1,-2\},\ \boldsymbol{b}=\{1,1,1\},\ \boldsymbol{c}=\{1,-1,0\}$$

分别作为新系O-$x'y'z'$的x'、y'和z'轴的方向，试导出它的

转轴变换式。

解 由于矢量$\boldsymbol{a}=\{1,1,-2\}$是新系的$x'$轴方向，可先求出$x'$轴与旧系$O$-$xyz$各坐标轴之间夹角的余弦。矢量的坐标分量就是它在坐标轴上的投影，由定理 2-1，有

$$1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha_1,\quad 1=|\boldsymbol{a}|\cos\beta_1\quad -2=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma_1$$

又

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

所以

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma_1=-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

同样地，由于$\boldsymbol{b}=\{1,1,1\}$是y'轴的方向，则有

$$1=|\boldsymbol{b}|\cos\alpha_2,\ 1=|\boldsymbol{b}|\cos\beta_2,\ 1=|\boldsymbol{b}|\cos\gamma_2$$

而

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

因此得

$$\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

仿此即得

$$\cos\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta_3=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma_3=0$$

以上得到了九个角的余弦，于是由式(2-32)，得到转轴变换式：

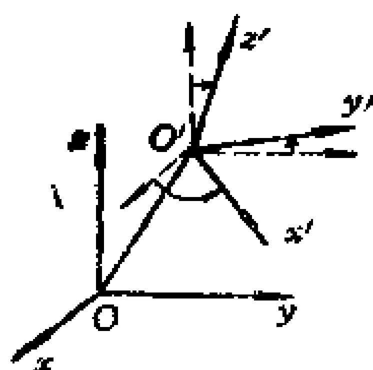
$$x=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'$$

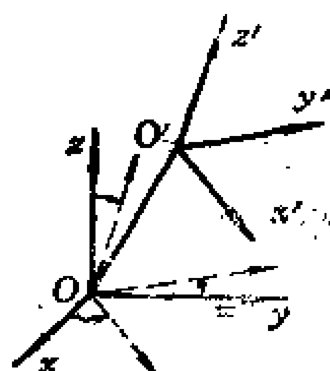
$$z = -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'。$$

三、运动变换

对于空间任意两个直交坐标系$O\text{-}xyz$和$O'\text{-}x'y'z'$之间的变换，总可以将其中的一个先经平移、再作旋转；或者先经旋转、再作平移，这样都能变到另一个坐标系。我们把这种由已知的坐标系接连作平移、旋转而得到新坐标系的变换，叫做空间直角坐标系的运动变换（平面直角坐标系与此类同）。显然，无论是先平移、后旋转，或者先旋转、后平移，所得的结果都是一样的（图 2-21）。



(a)



(b)

(a) 先平移后旋转　　(b) 先旋转后平移

图 2-21

因此，我们只要依次应用移轴及转轴公式，或者先后利用转轴及移轴公式，就可获得空间任一点M对于两坐标系间的坐标变换关系式。

例如，若将坐标系先平移到$O'(x_0, y_0, z_0)$，保持原点不动，再旋转坐标系，则新、旧系的空间直角坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + x_0 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + y_0 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + z_0 \end{cases} \qquad (2\text{-}37)$$

例2.12 将坐标系$O\text{-}xy$先逆时针向旋转$\frac{\pi}{4}$，再沿直线$y=-x$正向平移4个距离单位。求坐标变换公式。

解 先利用平面直角坐标转轴公式(2-36)，有

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

根据题意，平移后新原点O'的坐标为$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$，于是所求的坐标变换公式为

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 2\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2\sqrt{2}$$

习 题

1. 平面上一点M对旧坐标系的坐标是(2,1)，利用坐标平移，将原点O移到新原点O'，其坐标依次为(1)，(4,5)；(2)，(4,-5)；(3)，(-4,5)；(4)，(-4,-5)。求M的新

坐标。

2. 若平面直角坐标移轴公式是

$$(1)\begin{cases}x=x'+3\\y=y'+5\end{cases},\quad(2)\begin{cases}x=x'-5\\y=y'\end{cases}$$

求新原点O'的旧坐标。

3. 设M_1，M_2两点在旧系O-xy中的坐标分别是$(3,-4)$和$(2,3)$。若M_1在新系O'-$x'y'$的横轴上，M_2在O'-$x'y'$的纵轴上，试确定平移坐标变换公式。

4. 在平面直角坐标系中，若坐标轴旋转下列角度（1）$60°$，（2）$-45°$，（3）$180°$。试写出转轴变换公式。

5. 给定三点$M(3,1)$、$N(-1,5)$和$P(-3,-1)$。若将坐标轴旋转：（1）$45°$；（2）$90°$；（3）$120°$。试求它们在新坐标系中的坐标。

6. 设有两已知点$M_1(1,3)$和$M_2(4,7)$，若将坐标原点移到M_1，并旋转坐标轴，使新横轴的正向与矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向一致。求坐标变换公式。

7. 若将空间直角坐标系的原点移到$O'(3,1,-2)$，求移轴变换公式。并求点$M_1(0,2,-1)$和$M_2(-1,1,3)$的新坐标。

8. 将坐标系O-xyz绕逆针向旋转$\frac{2}{3}\pi$，再沿x轴方向平移5个距离单位。求坐标变换公式。

9. 在空间直角坐标系中，若以三矢量$\boldsymbol{a}=\{2,-2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,-2\}$和$\boldsymbol{c}=\{1,2,2\}$分别作为新的$x$、$y$及$z$轴方向，试写出转轴变换公式。

10. 设一圆在坐标系O-xy中的方程为$x^2+y^2=R^2$。现将原点移到$O'(1,1)$，并转轴$\frac{\pi}{6}$，求该圆在新系中的方程。

第三章　矢量的乘积

本章介绍矢量所特有的几种乘法运算，这就是两矢量的标积与矢积，以及三矢量的混合积与二重矢积。它们的运算与一般标量的乘法有很大的差别。利用矢量的坐标分解法，同样可将这些矢量乘积转化为特殊形式的实数运算。

通过应用矢量乘积所具有的几何性质，就能方便地解决有关角度、长度、面积以及体积等方面的几何问题，从而进一步扩大了矢量的应用范围。

§3.1　矢量的标积

一、标积的概念

定义　两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模与它们之间夹角的余弦的乘积，叫做$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的标积①，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$②。公式表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \tag{3-1}$$

这里$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$代表$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间夹角的余弦。可以看出，标积的定义与坐标系无关。

根据矢量的投影定理，由图3-1可知，$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$是$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影，而$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$则是$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影。即有

---

①也称为点积、内积或数量积。

②读作"a点乘b"。两矢量中间的"·"号不能丢掉，否则称为并矢，而并矢是张量。

$$(\boldsymbol{b})_a=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

及 (3-2)

$$(\boldsymbol{a})_b=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

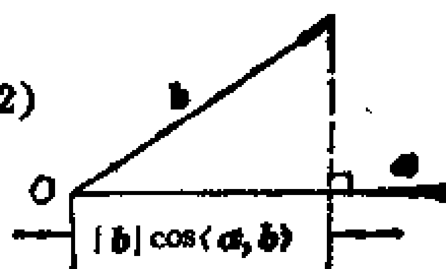


图3-1

于是式(3-1)可写为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_b \qquad (3\text{-}3)$$

两矢量的标积是一标量，而不是矢量。

矢量的标积应用很广。在物理学中常常要讨论力的作功问题，而功的概念就是以力与位移的标积来表述的。例如，一物体在重力$\boldsymbol{F}$作用下沿斜面下滑，设$\boldsymbol{S}$为位移矢量，$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$的夹角为θ。那末$\boldsymbol{F}$所作的功就是

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}|\cos\theta|\boldsymbol{S}|$$
$$=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$$

即功(W)是由两矢量($\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{S}$)的模和它们夹角余弦的乘积所表述的一个标量。

二、标积的性质

我们先叙述标积的运算性质，也就是它的代数运算规律，然后讨论它的几何性质。

1．标积的运算性质

1）满足交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \qquad (3\text{-}4)$$

根据标积的定义式(3-1)，有$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$可知式(3-4)成立，亦即标积与两矢量的先后顺序无关。

2)与数乘满足结合律

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}) \tag{3-5}$$

其中λ为实数。

证 由投影定理及式(3-3)，有

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\lambda \boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{b}|\lambda(\boldsymbol{a})_b$$
$$=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})。$$

同理，可得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$$

由此可知，与矢量相乘的数量可以取出放在标积记号的外面。

3）满足分配律

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c} \tag{3-6}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_a$$

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_a$表示$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$和矢量在$\boldsymbol{a}$方向的投影，而据投影定理2.2，矢量和的投影等于矢量投影的代数和，即

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_a=(\boldsymbol{b})_a+(\boldsymbol{c})_a$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a+|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{c})_a$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}$$

同样可以证明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{d} \tag{3-6a}$$

2．标积的几何性质

1）零矢量与任一矢量的标积等于零。

若$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$为零矢量，则由式(3-1)，显然有

$$\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$$

由于零矢量的方向是任意的，可以看作与任何矢量垂直。

据此，若两个非零矢量的标积等于零，那末由式(3-1)可知，两矢量必互成90°角。由此有

定理3.1 两个非零矢量($\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$)互相垂直的充要条件，是它们的标积等于零，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{3-7}$$

2) 若两非零矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \tag{3-8}$$

式中正负号分别适用于同向及反向情况。

这个结果是明显的，因若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行且同向，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\cos 0=1$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

而当反向时，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\cos\pi=-1$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

3) 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间的夹角大于$\frac{3}{2}\pi$或小于$\frac{\pi}{2}$，则标积为正值；反之若夹角在$\frac{\pi}{2}$和$\frac{3}{2}\pi$之间，则为负值。

4) 利用式(3-1)，两非零矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间夹角余弦的表示式可写成

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \tag{3-9}$$

5) 矢量$\boldsymbol{a}$与它本身的标积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，常简记作$a^2$，由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2$$

则

$$a^2\text{①}=|\boldsymbol{a}|^2 \tag{3-10}$$

即矢量之模的平方，等于这矢量与本身的标积。

---

①a^2是数量平方的符号，有时称之为矢量的数性平方。

特别地，若$\boldsymbol{a}$为单位矢量，则有

$$\boldsymbol{a}^2=1$$

例3.1 证明三角形的余弦定律

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$$

证 在三角形ABC中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$（图3-2）。于是有

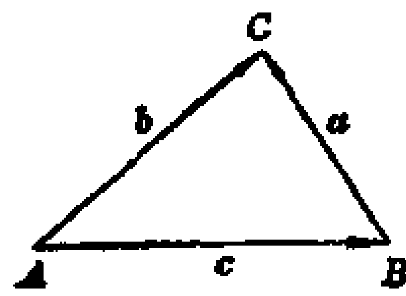


图3-2

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

则

$$\boldsymbol{a}^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2$$

而

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

则有

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

于是

$$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-2|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$$

即得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\langle b,c\rangle$$

例3.2 证明：等腰三角形的顶角平分线、底边的中线、高线和中垂线必重合。

证 在三角形ABC中，已知$AB=AC$，D为BC边的中点（图3-3）。设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，则

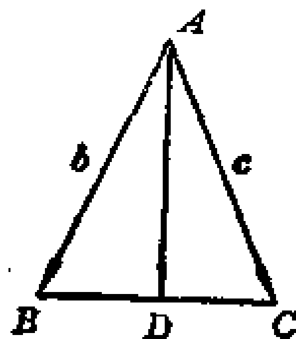


图3-3

$$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

由于

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{b}^2)$$

$$=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)$$

$$=0$$

则据定理3.1可知，必有$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，即$AD\perp BC$。因此，$AD$即是底边的中线、高线，因而也就是中垂线。

又由式(3-9)，有

$$\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}|\ |\overrightarrow{AB}|}=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\overrightarrow{AD}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}{|\overrightarrow{AD}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

$$\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}|\ |\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}}{|\overrightarrow{AD}|\ |\boldsymbol{c}|}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2)}{|\overrightarrow{AD}|\ |\boldsymbol{c}|}$$

因为$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，即有$b^2=c^2$。所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{c}\rangle$$

而角$\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{b}\rangle$和角$\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{c}\rangle$都是锐角，故有

$$\angle DAB=\angle DAC$$

这就表明，AD又是顶角A的平分线。

以上两例讨论了标积在几何上的应用。由于标积是用矢量的模及角度来定义的，而这种运算符合于一些代数运算规律。故有关长度和角度等几何方面的问题，就可由矢量的标积

运算来解决。从以上可以看出，这种解决问题的方法，一般说来既简单又方便。

三、 标积的坐标表示法

无论是空间矢量还是平面矢量，只要知道两矢量的直角坐标，就可算出它们的标积。以下讨论的问题皆以空间情形为例，至于平面情形，只要视竖坐标为零，即可得出相应的结论。

1. 在空间直角坐标系$O\text{-}xyz$中，坐标矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$都是单位矢量，且两两互相垂直。于是根据定理3.1，以及共线矢量的标积的性质，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$之间具有以下的标积关系：

$$\begin{aligned}&1)\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\\&2)\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\end{aligned}\qquad(3\text{-}11)$$

即两个不同的坐标矢量的标积为零；两个相同的坐标矢量的标积为1。

2. 在空间直角坐标系中，设给定两矢量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$和$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$。利用上述坐标矢量的标积关系，以及标积的分配律，就能导出两矢量的标积的坐标计算公式。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_x\boldsymbol{i}\\&\quad+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_y\boldsymbol{j}\\&\quad+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_z\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}\\&\quad+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\qquad(3\text{-}12)$$

即两矢量的标积，等于它们对应的坐标分量的乘积之和。通过坐标来计算标积是相当容易的，因而式(3.12)的应用十分广泛。

3. 根据标积的坐标计算式(3-12)，可以对标积的几何性质作以下的进一步推论。

1）两个矢量($\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$)互相垂直的充要条件，是它们的相应坐标分量乘积之和等于零，即

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

2）两个非零矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$间夹角的余弦的坐标表示式为

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\ \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}} \tag{3-13}$$

3）在空间直角坐标系中，任一矢量的坐标分量，等于它与各坐标矢量的标积。即

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}\} \tag{3-14}$$

例3·3 给定三点$A(1,1,1)$、$B(2,2,1)$和$C(2,1,2)$，求两矢量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角θ。

解

$$\overrightarrow{AB} = (2-1)\boldsymbol{i} + (2-1)\boldsymbol{j} + (1-1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1)\boldsymbol{i} + (1-1)\boldsymbol{j} + (2-1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 1$$

又

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$$

由式(3-13)，得

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

所以

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

例3.4 证明两角之和及两角之差的余弦公式

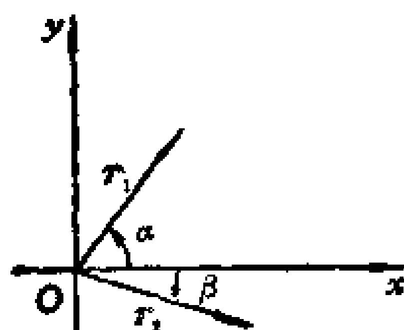


图3-4

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。$$

证 （1）在平面直角坐标系O-xy中，取两个单位位矢$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$，且$\langle\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{i}\rangle=\alpha$，$\langle\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{i}\rangle=-\beta$(图3-4)。则根据式(2-26$a$)，有

$$\boldsymbol{r}_1=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$$

$$\boldsymbol{r}_2=\{\cos\beta,-\sin\beta\}$$

且$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$的夹角为$\alpha+\beta$。

又由式(3-13)，有

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$$

而

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)$$

所以

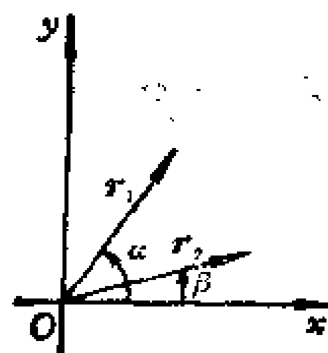


图3-5

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

（2）如图3-5，$\langle\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{i}\rangle=\alpha$，$\langle\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{i}\rangle=\beta$。两个单位位矢$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$可表示为

$$\boldsymbol{r}_1=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$$

$$\boldsymbol{r}_2=\{\cos\beta,\sin\beta\}$$

这里$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$的夹角为$\alpha-\beta$。

于是有

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2|}=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2$$

而

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

因此

$$\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

例3.5 证明不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)①$$

成立。

证 设$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

又根据标积的定义，有

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

而

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

所以有

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

将上式两边平方，即得

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

---

①这个不等式称为柯西-施瓦茨不等式。其一般形式为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

式中等号仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，即两矢量共线时成立。

习　题

1. 已知两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=\frac{2\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$。试计算：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，（2）$(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，（3）$\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b})$，（4）$\boldsymbol{a}^2$，

（5）$\boldsymbol{b}^2$，（6）$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$，（7）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

（8）$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，（9）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

2. 判定以下各式是否正确？

（1）$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$，　　（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^3$，

（3）$|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^3$，

（4）$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$，（5）$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{a}$，

（6）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，

（7）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$，

（8）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，（9）$\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\boldsymbol{a}$。

3. 两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$必须满足什么条件，才能使矢量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与矢量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直？

4. 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为单位矢量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，试计算$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$。

5. 若$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{q}$，且$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$是互相垂直的单位矢量，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

6. 证明：平行四边形两对角线的平方和等于四边的平方和。

7. 已知空间中三个非零矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$两两垂直，且矢量

$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}$。求证：

（1）$\lambda_1=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，　（2）$\lambda_2=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$，（3）$\lambda_3=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}$。

8．用矢量方法证明：内接于一圆、且以该圆直径为一边的三角形是直角三角形。

9．用矢量方法证明：三角形的三条高线相交于一点（垂心）。

10．用矢量方法证明：对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

11．从正方形的一个顶点引两直线，它们分别平分对边。求这两直线间的夹角。

12．给定矢量$\boldsymbol{a}=\{1,1,-4\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-2,1\}$。试计算：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，（2）$|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$，（3）$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，(4) $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$。

13．一质点在力$\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$作用下，发生位移$\boldsymbol{S}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$。计算该力所作的功、以及力与位移间的夹角。（力的单位为牛顿、长度的单位为米）

14．已知$\boldsymbol{U}=\{5,2,-3\}$、$\boldsymbol{V}=\{-3,9,z\}$互相垂直，求$z$，并计算$(\boldsymbol{U}-2\boldsymbol{V})^2$。

15．给定三矢量$\boldsymbol{a}=\{1,-2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,0,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{-3,1,0\}$。求满足矢量方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=4\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=20\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=0\end{cases}$$

的矢量$\boldsymbol{x}$。

16．设矢量$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与矢量$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$垂直，矢量$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$与矢量$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直。求矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角。

17. 以力$\boldsymbol{F}$作用于一质点，使质点从起点$M_1(1,2,-1)$移到终点$M_2(2,5,-1+3\sqrt{2})$。设力的大小为100牛顿，方向角依次为$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$。求力$\boldsymbol{F}$所作的功(长度单位为米)。

18. 求与矢量$\boldsymbol{a}=\{2,-1,2\}$共线，且满足方程$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$的矢量$\boldsymbol{x}$。

19. 若三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$两两垂直，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$。试求矢量$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$的模，以及它分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$所成之角的余弦。

§3.2 矢 量 的 矢 积

一、矢积的概念

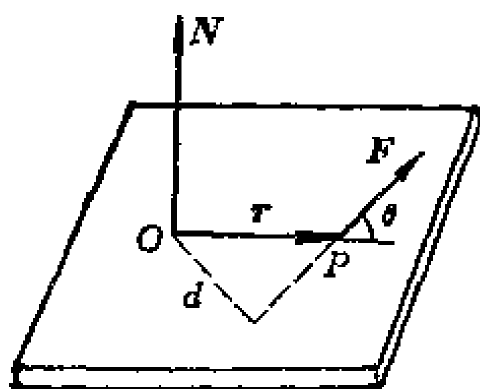


图3-6

作为矢积的物理模型，在力学上就是力矩。力矩是表示力对物体作用所产生的转动效应的物理量。例如，力$\boldsymbol{F}$对于定点O的力矩，可以用一矢量$\boldsymbol{N}$来表示(图3-6)，它是一个具有大小和方向的量。

力矩量值的大小等于力$\boldsymbol{F}$的大小和力臂d的乘积，即

$$|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{F}|d。$$

而d也就是从O点到力$\boldsymbol{F}$的作用线的距离。

设$\boldsymbol{F}$的作用点为P，令$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，$\theta=\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{F}\rangle$，则

$$d=|\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

于是力矩的大小是

$$|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

力矩的方向按下述方法确定。

用右手四指表示$\boldsymbol{r}$沿最短路径旋转到$\boldsymbol{F}$的方向，这时大姆指的指向就是力矩$\boldsymbol{N}$的方向(图3-6)。显然，$\boldsymbol{N}$同时垂直于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$，即$\boldsymbol{N}$垂直于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$所决定的平面。因此，$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{F}$与力矩$\boldsymbol{N}$构成右手系。

综上所述，可知表示力矩的矢量$\boldsymbol{N}$，其大小和方向完全由力$\boldsymbol{F}$、以及力的作用点P对于点O的位矢$\boldsymbol{r}$所确定。这样的乘积就是两矢量的矢积。

定义 两矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的矢积①是一个矢量$\boldsymbol{c}$。它的模

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \qquad (3\text{-}15)$$

而方向与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都垂直，即垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所决定的平面，且按$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的顺序构成右手系(图3-7)。记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}②。$$

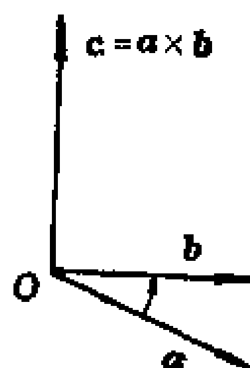


图3-7

根据定义，矢积是一矢量，而不是标量。两个矢量经过上述运算得到一个矢量，这也就是矢积这个名称的来源。

从图3-8容易看出，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的矢积的模，恰好是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为两邻边的平行四边形的面积。平行四边形底边长为$|\boldsymbol{a}|$，高为$|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，所以面积为

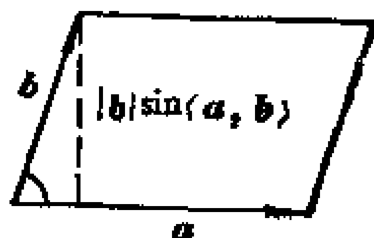


图3-8

$$\begin{aligned}S&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \qquad (3\text{-}16)\end{aligned}$$

①矢积也叫做叉积或外积。

②a×b读作"a叉乘b"。

因此，两矢量的矢积的模的几何意义，是以这两矢量为邻边的一个平行四边形的面积。

二、矢积的性质

1. 几何性质

1）零矢量与任一矢量的矢积为零。

这一结论可从矢积的定义直接得出。

若两个非零矢量的矢积为零，则由式(3-15)可知，这两矢量的夹角或为0或为 π，因而有

定理3.2 两非零矢量平行的充要条件，是它们的矢积等于零，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$$

2）任一矢量$\boldsymbol{a}$与自身的矢积为零，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$$

3）两非零矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，其夹角的正弦可写成

$$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{3-17}$$

4）两个互相垂直的矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的矢积的模，等于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的模的乘积，即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

因为这时$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sin\frac{\pi}{2}=1$。

将矢积与标积对应的几何性质的特点相对比，可以看出：两个平行矢量的特征是它们的矢积为零；而两个相互垂直的矢量的特征，就是它们的标积为零。

2. 运算性质

1）具有反交换性

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{3-18}$$

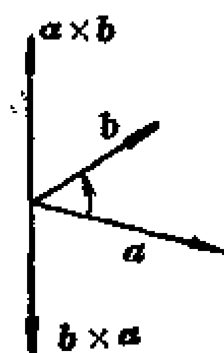


图3-9

这个性质是根据矢积的定义得来的。即若交换两矢量的顺序，那末它们的矢积的指向相反(图3-9)。因此矢积的值与几个矢量的顺序有关，这一性质与实数的运算截然不同。

2) 与数乘满足结合率

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{3-19}$$

证 若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，或$\lambda=0$，或$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$中有一个为零，则式(3-19)显然成立。

在以上三种情况之外，有

$$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$
$$|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}\rangle,$$
$$|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle。$$

当$\lambda>0$时，角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}\rangle$；当$\lambda<0$时，角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}\rangle$。在这三种情况中都有

$$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sin\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sin\langle\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}\rangle$$

所以

$$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|=|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$$

又因为$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$和$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$都垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所决定的平面，故它们是互相平行的。而且在$\lambda>0$时，它们与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$同向；在$\lambda<0$时，则与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$反向。这就表明，无论$\lambda>0$或$\lambda<0$，它们的方向都相同。

综上所述，可知$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$和$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$是模相等、且方向相同的矢量。所以有

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})。$$

故与矢量相乘的数量可以取出放在矢积号外。

3）满足分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}①\qquad(3\text{-}20)$$

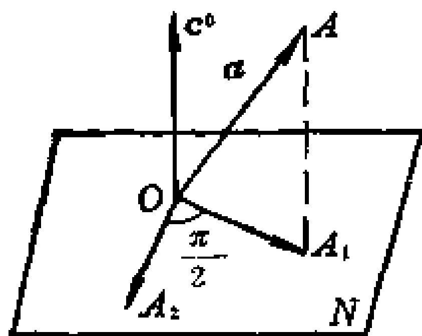


图3-10

证 设$\boldsymbol{c}^0$为与$\boldsymbol{c}$同向的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0$$

首先证明$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$。考察矢量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$，它同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}^0$，可用作图法求出这个矢量。

如图3-10，N为与$\boldsymbol{c}^0$垂直的平面，将矢量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$投影到$N$面上，得分矢量$\overrightarrow{OA_1}$。并注意到

$$|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOA_1=|\boldsymbol{a}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0\rangle$$
$$=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}^0|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0\rangle$$

然后将$\overrightarrow{OA_1}$在N平面上绕点O按顺时针方向转$\frac{\pi}{2}$，得到矢量$\overrightarrow{OA_2}$。并且有

$$|\overrightarrow{OA_2}|=|\overrightarrow{OA_1}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}^0|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0\rangle$$

所以

$$|\overrightarrow{OA_2}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0|$$

又$\overrightarrow{OA_2}$垂直$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}^0$，且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}^0$、$\overrightarrow{OA_2}$构成右手系，则有

$$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$$

其次，以A为起点作矢量$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，那末

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

将$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$投影到N平面，得到一个由$\overrightarrow{OA_1}$、$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{OB_1}$构

①在§3例3-15中，利用混合积的性质，给出了一个比较简捷的证明。

成的三角形OA_1B_1(图3-11)。再将三角形 OA_1B_1 在 N 平面绕点O顺时针方向转$\frac{\pi}{2}$，得到和OA_1B_1全等的三角形 OA_2B_2。

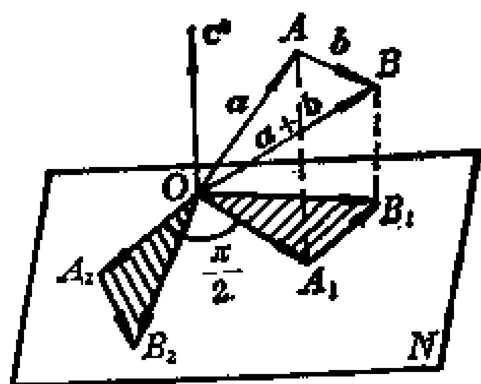


图3-11

从以上讨论可知，

$$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0,$$

$$\overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0,\quad \overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0$$

由于

$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0$$

由此有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0&=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0\\&=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0)\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0|\boldsymbol{c}|+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0|\boldsymbol{c}|\end{aligned}$$

即得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

从这个性质的证明中，我们得到一个法则，即对于两矢量(其中每一矢量都是矢量多项式的形式)的矢积的求法，可仿照普通代数中多项式的乘法，也就是由逐项相乘的方法来完成。不过矢量的顺序不能随便交换，因为矢积是反交换的。

例3.6 证明：平行四边形的面积，等于以它的两条对角线为边的平行四边形面积的一半。

证 如图3-12所示，设$ABCD$为平行四边形，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，它的面积显然为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。又

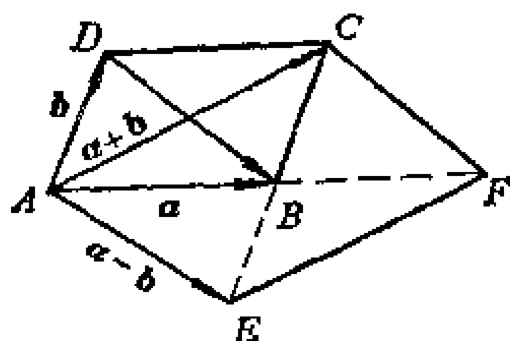


图3-12

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

则以$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AE}$(即$\overrightarrow{DB}$)为邻边所构成的平行四边形$AEFC$的面积为$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$。

根据分配律法则，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\&=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$$

例3.7 证明正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

证 设三角形ABC，三个内角A、B、C所对的边为a、b、c，记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$(图3-13)，有

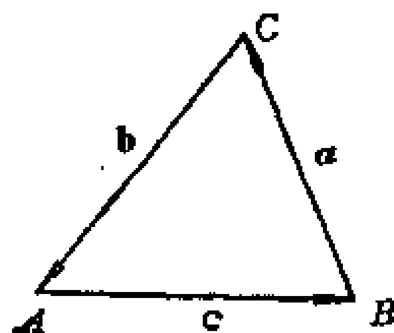


图3-13

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$$

将上式等号两边的矢量分别与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$作矢积，则有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$$

和

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$$

再将两式展开，得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0$$

及

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$$

因为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$，又

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

于是得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},$$

和

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

而相等矢量的模必相等，则有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$$

及

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$$

于是有

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\pi-C)=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin(\pi-B)$$

和

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\pi-C)=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin(\pi-A)$$

所以

$$\frac{|\boldsymbol{a}|}{\sin A}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{\sin B}=\frac{|\boldsymbol{c}|}{\sin C}$$

即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

例3.8 设三个位矢 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$。求其终点$A$、$B$和$C$位于同一直线上的充要条件。

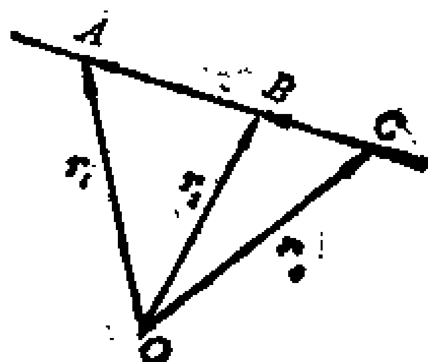


图3-14

解 如图3-14所示，有

$$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$$

$$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3$$

若A、B、C三点共线，则$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{CB}$共线，即$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$与$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3$共线。根据定理3.2，矢量$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$与矢量$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3$共线的一个充要条件为

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)=0$$

即

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3=0$$

由于$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_2=0$，且$\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3$，于是得到三个位矢$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$的终点共线的充要条件：

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=0$$

三、矢积的坐标表示法

根据以上讨论的有关性质，我们可用矢量的坐标表达式来描述两矢量的矢积。为此，先讨论一下坐标矢量间的矢积关系。

1．在空间直角坐标系$O-xyz$中，坐标矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$都是两两互相垂直的单位矢量，且按照$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的顺序构成右手系。于是，根据矢积的定义及其性质，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$之间具有以下的矢积关系：

1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$

2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}&=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}&=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}&=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\end{aligned}\qquad(3\text{-}21)$$

为了避免弄错以上公式的符号，可借助于图3-15帮助记忆。用法如下：

① 按箭头所示方向（即逆时针方向）作矢积，其结果等

于第三个矢量。

② 沿逆箭头方向（即顺时针方向）作矢积，其结果等于第三个矢量的逆矢量。

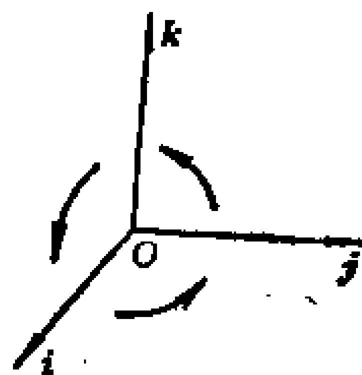


图3-15

2．在空间直角坐标系中，两矢量$\boldsymbol{a}=\{a_x、a_y、a_z\}$和$\boldsymbol{b}=\{b_x、b_y、b_z\}$的矢积的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{3-22}$$

对上式可推导如下：利用矢积的分配律性质，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})$$

$$+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})$$

$$+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})$$

再由式(3-21)，可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a_yb_x(-\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{j})+a_xb_x(\boldsymbol{k})$$

$$+a_zb_1(-\boldsymbol{i})+a_xb_z(-\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{i})$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

3．根据以上讨论的结果，可得出下面的一些推论。

1) 我们知道，两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行的充要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，则由式(3-22)，有

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_z b_x - a_x b_z = 0,$$
$$a_x b_y - a_y b_x = 0$$

即得

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

这个式子与定理2.3的结论完全一致，可用来判定两矢量是否平行。但当b_x、b_y、b_z中至少有一个为零时，它就失去意义。

2）矢积的模可以表示为

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} \tag{3-23}$$

3）两矢量的夹角正弦的坐标表示式

$$\sin\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{3-24}$$

例3.9 求既垂直于矢量$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$，又垂直于矢量$\boldsymbol{b} = (2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$的单位矢量。

解 根据矢积的定义可知，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$是既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$的矢量(但不一定是单位矢量)，故可先求出$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。由式3-22，有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

而

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})。$$

这就是所求的单位矢量。

例3.10 证明以$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$和$C(x_3,y_3)$为顶点的三角形ABC的面积为

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

其中当行列式为正值时取"+"号，为负值时取"-"号。

证 将A、B、C作为空间直角坐标系中xOy坐标面上的点，这样就可记作$A(x_1,y_1,0)$、$B(x_2,y_2,0)$，$C(x_3,y_3,0)$。作矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$，则有

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,0\}$$

及

$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,0\}$$

由前面的讨论可知，三角形ABC的面积等于以$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$为邻边所构成的平行四边形面积的一半。则有

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

所以

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

例3.11 证明恒等式

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2 ①$$

证 设在空间直角坐标系中，给定两矢量

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$$

则根据标积的性质，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\boldsymbol{a}|^2$$
$$=\boldsymbol{a}^2$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=b_1^2+b_2^2+b_3^2=|\boldsymbol{b}|^2$$
$$=\boldsymbol{b}^2$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

由式(3-22)可知，$(a_2b_3-a_3b_2)$、$(a_3b_1-a_1b_3)$和$(a_1b_2-a_2b_1)$就是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的坐标分量。因此有

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2$$
$$=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$$

于是本题可归结为证明矢量恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2。$$

由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$$
$$=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2$$

---

①该式称为欧勒-拉格朗日恒等式。

$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

例3.12 设一刚体绕通过O点的轴、以角速度ω旋转。证明其上任一质点M的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

其中$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，是点$M$的位矢；矢量$\boldsymbol{\omega}$的模为$\omega$，方向则是在给定的旋转下按右手定则确定。

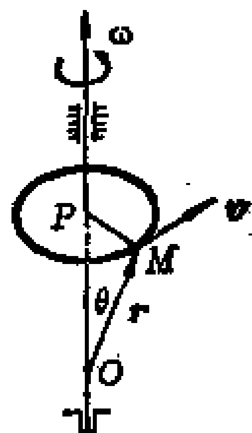


图3-16

证 如图3-16所示，作矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，则有

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta$$

因为质点M在一半径为

$PM=|\boldsymbol{r}|\sin\theta$的圆周上运动，它的线速度$\boldsymbol{v}$的模是$\omega(|\boldsymbol{r}|\sin\theta)$，所以

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|$$

此外，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$的方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$及$\boldsymbol{r}$，且与$\boldsymbol{v}$的指向相同。由此即得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$称为角速度矢量。

习　题

1．两矢量的矢积的模有什么几何意义？$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$这种写法对吗？为什么？

2．若$\boldsymbol{a}^0$和$\boldsymbol{b}^0$是两个单位矢量，问$\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0$是否还是单位矢量？在什么条件下它一定是单位矢量？

3．若$\boldsymbol{a}^0$和$\boldsymbol{b}^0$是两个不平行的单位矢量，问$\dfrac{\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0}{\sin\langle\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0\rangle}$

表示什么?

4. 化简下列各式:

(1) $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$,

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,

(3) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,

(4) $(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\times(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p})\times(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{p})$。

5. 给定二矢量$\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$,$\boldsymbol{b}=\{-1,1,3\}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,　　(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$,

(3) $2\boldsymbol{a}\times 7\boldsymbol{b}$,　　(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$。

6. 一个四面体的顶点为O、A、B、C,分别位于原点及x、y、z轴上,且$\overrightarrow{OA}=a\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=b\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=c\boldsymbol{k}$。求四面体的表面积。

7. 已知角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$。计算:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$;　　(2) $[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})]^2$

8. 若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,证明$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$。

9. 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是互相垂直的单位矢量,试计算由$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$所构成的平行四边形面积。

10. 一力绕一给定点的力矩$\boldsymbol{\tau}$定义为$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$,其中$\boldsymbol{r}$是从给定点到力$\boldsymbol{f}$的作用点的矢量。设有一力$\boldsymbol{f}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$(牛顿),作用点的位矢为$7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$(米)。试求:(1)绕原点$O$的力矩(牛顿·米),用坐标表示;(2)绕点$O'(0,10,0)$的力矩。

11. 试导出两角之和的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。$$

12. 已知两矢量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$。求同时与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$垂直的单位矢量$\boldsymbol{e}$。

13. 设有两质点p_1和p_2,其位矢分别为$\boldsymbol{r}_1=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+$

$8\boldsymbol{k}$及$\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$。试求

（1） p_2对p_1的位矢，

（2） 每个位矢的大小，

（3） 每对位矢间的夹角，

（4） 矢积$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$。

14. 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$；$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$。证明$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$共线。

15. 已知一个三角形的顶点是$A(1,2)$、$B(3,5)$和$C(1+3\sqrt{3},2-2\sqrt{3})$。试计算

（1） 三角形ABC的三内角；

（2） 三边的长度。

16. 设三角形ABC的两个边$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$和$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{n}$是单位矢量，且互相垂直。试求高$\overrightarrow{CD}$的长度。

§3.3 矢量的混合积与二重矢积

一、三个矢量的乘积

以上两节我们讨论了矢量的两种乘积：即标积与矢积，它们无论在方法上还是在结果上都是不相同的，但参与运算的乘数限于两个矢量。

现在我们来研究三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的乘法运算。不难看出，三矢量相乘的组合只有三种形式：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c};\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c};\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

第一种情形是先以两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$数性相乘，即作成标积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$而得一标量，再将其与第三矢量$\boldsymbol{c}$相乘，结果就得到一与$\boldsymbol{c}$共线的矢量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$。利用相同的方法，还可以构成与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$各自共线的矢量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$及$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$。因为两矢量的标积运算得到的

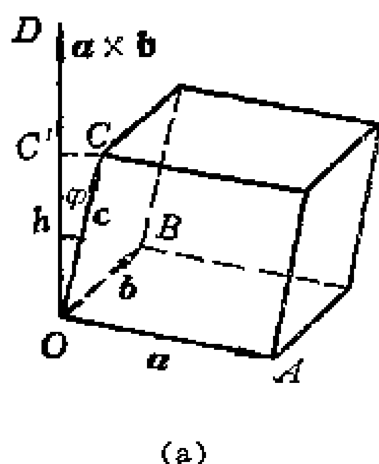
是一数量，故上述这种情形相当于一数量和一矢量相乘。因而，它在实质上与第一章中所讨论的数乘矢量没有区别。

在后两种情形中，两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$矢性相乘，得矢积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，这是一矢量。因此，它与第三矢量$\boldsymbol{c}$既可数性相乘，如$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；也可矢性相乘，如$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$。这样，前一运算结果是一标量，而后一运算结果是一矢量。

定义 对于给定的三个矢量，其中任意两个矢量的矢积，若与第三矢量作成标积，则所得结果是一标量，叫做这三矢量的混合积；若与第三矢量再作矢积，则所得结果是一矢量，叫做这三矢量的二重矢积。

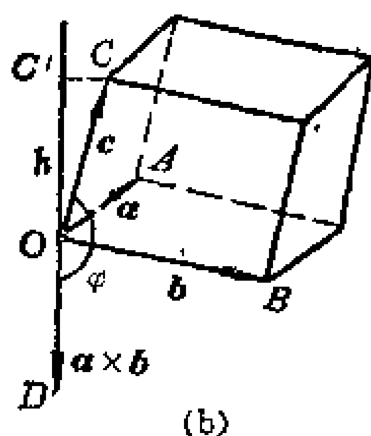
二、矢量混合积的几何意义

现以$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的形式为例。设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为三个交于一点而不共面的矢量，记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。以它们为棱构成一平行六面体(图3-17)。先看$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，显然，这个矢积在数值上等于以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积，方向垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所决定的平面，即$OAB$面，如图中的$\overrightarrow{OD}$。按右手定则，当$\boldsymbol{a}$绕$\overrightarrow{OD}$



(a)

(a) $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$



(b)

(b) $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$

图3-17

沿最短路经转向$\boldsymbol{b}$时，它与坐标系的x轴绕z轴转向y轴的方向一致。再将矢量$\boldsymbol{c}$投影到$\overrightarrow{OD}$上，得分矢量$\overrightarrow{OC'}$，设其值为h，则

$$h=|\overrightarrow{OC}|\cos\varphi$$

其中φ是$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OD}$的夹角。而线段$\overline{OC'}$显然垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所成的平面，亦即是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$组成的平行六面体的高。于是该平行六面体的体积为

$$V=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\varphi$$

，即

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle \qquad (3\text{-}25)$$

容易看出，上式右边就是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的绝对值。因此，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为三棱的平行六面体体积为

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| \qquad (3\text{-}25a)$$

当$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$，即$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$位于$OAB$平面的同侧时，$\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle>0$，因而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0。$$

而当$\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$、即$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$位于$OAB$面的两侧时，则$\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle<0$，因此

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0。$$

对于上述两种情况，若从三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$所成三面角的内部往顶点O观察它们的顺序时，可以看出，前者按逆时针方向，而后者按顺时针方向。据此，将具有前一种顺序关系的三矢量称为右旋系，而后一种叫做左旋系。

由此，混合积的几何意义可简述如下：

三矢量的混合积的绝对值，等于以这三个矢量为棱所构成的平行六面体的体积。当三矢量为右旋系时，混合积为正；

而当三矢量为左旋系时，混合积为负。

根据以上的讨论，我们得到

定理3.3 三个矢量共面的充要条件是它们的混合积等于零。

这个定理可以从混合积的几何意义直接加以验证。由于三矢量混合积的绝对值等于由它们所构成的平行六面体的体积，因而，若三矢量共面，则这六面体的体积等于零，于是三矢量的混合积为零。反之，若三矢量的混合积等于零，即平行六面体的体积为零，因此这三个矢量共面。

下面分别列出定理3.1、定理3.2以及定理3.3的条件，以便于比较对照。

1）两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$互相垂直的条件（定理3.1）

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

（标积等于零）

2）两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线的条件（定理3.2）

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$$

（矢积等于零）

3）三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面的条件（定理3.3）

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$$

（三矢量的混合积等于零）

三、混合积的代数性质

1. 不服从交换律，即当交换混合积中两矢量的位置时，混合积变号。即有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}\\&=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

这是因为，在给定的三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$中，当交换其中某两个矢量的位置时，就改变了这三个矢量原来的顺序，使原来的右旋系变成了左旋系（或者相反），因而混合积变号，即所得的混合积为原混合积的相反数。但是，不管各矢量的顺序如何改变，由它们所构成的平行六面体却是唯一的，因此，它们的混合积的绝对值相等。

2．轮换三矢量的位置，其混合积不变。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{3-26}$$

显然，这三个混合积都等于以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，因而它们在数值上相等。此外，若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右旋系，则在轮换其顺序后，所成的$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$也必定是右旋系，所以三个混合积的符号也相同。

混合积是矢积与标积的混合，也就是说，它是由两矢量通过矢性相乘所得的矢量，再与第三矢量数性相乘的结果。由此，根据两矢量的标积和矢积对于数乘具有结合律、以及满足分配律等的性质，就不难得出混合积的以下两个性质：

3．对于数乘满足结合律。

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{c})\\&=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{3-27}$$

4．满足分配律。

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_1+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_2\\ [(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\ [\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3)]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)\cdot\boldsymbol{c}_1+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{c}\end{gathered} \tag{3-28}$$

三矢量混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$可以简记为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$。

例3.13　证明若三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$满足条件

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0 \tag{3-29}$$

则$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$是共面矢量。

证 由定理3.3可知，若要证明三矢量是共面的，就只须证明它们的混合积等于零即可。为此，将矢量$\boldsymbol{a}$与已给的条件等式两边作点乘

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot 0$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$$

根据混合积的性质，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})=0\\ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})=0\end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$$

所以三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面。

例3.14 设A、B、C是不在同一直线上的三点，且它们对于原点的位矢分别为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{c}$。证明$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$是垂直于过$A$、$B$、$C$的平面的矢量。

证 设$\boldsymbol{r}$是A、B、C平面内任一点D的位矢，则矢量$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$共面。由定理3.3，有

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0$$

即

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$$

于是矢量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$垂直于矢量$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$，因此也就垂直于$A$、$B$、$C$平面。

例3.15 证明矢积满足分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

证 我们先来证明，若矢量$\boldsymbol{S}$同时垂直于三个不共面矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$，则$\boldsymbol{S}$必为零矢量，即$\boldsymbol{S}=0$。

用反证法：设$\boldsymbol{S}\neq 0$，由于$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$都与$\boldsymbol{S}$垂直，因而它们都同时与垂直于矢量$\boldsymbol{S}$的一个平面平行，据此，由共面矢量的定义，则$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$共面，而这与题设相矛盾，所以$\boldsymbol{S}=0$。

于是，根据上述事实，并利用标积的分配律以及混合积的轮换性，就可对本题作出证明。

现设$\boldsymbol{r}$为任意矢量，则有

$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{r}&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\
&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{b}\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{r}\\
&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]^{①}\cdot\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

于是

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{r}-[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{r}=0$$

即

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{r}=0 \qquad (3\text{-}30)$$

由此，若令矢量$S=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$，则$\boldsymbol{S}$与$\boldsymbol{r}$垂直。由所设$\boldsymbol{r}$的任意性，若依次取$\boldsymbol{r}$为$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$，且$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$不共面。于是由式(3-30)可知，$\boldsymbol{S}$是同时与三个不共面矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$垂直的矢量，所以$\boldsymbol{S}=0$，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$$

故得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

例3.16 试将任一矢量$\boldsymbol{S}$表示成三个不共面矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$的一个线性组合。

解 根据线性组合的定义，有

---

①由$[(a+b)\times c]\cdot r=[(a\times c)+(b\times c)]\cdot r$一般不能直接得到$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$，这是因为空间中垂直于同一矢量a的两个矢量b和c不一定相等，换句话说，由$a\cdot b=a\cdot c$，不一定得到$b=c$。

$$\boldsymbol{S}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c} \tag{3-31}$$

先求系数m。为此，用矢量$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$与式(3-31)两边矢量作点乘

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{S}&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot m\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot n\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot p\boldsymbol{c}\\&=m(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$不共面，所以$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\neq 0$，

则有

$$m=\frac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{S}}{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}}=\frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{S}]}{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}$$

同理

$$n=\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{S}}{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{S}]}{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]};\quad p=\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{S}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}=\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{S}]}{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}$$

所以

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}\Big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{S}]\boldsymbol{a}+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{S}]\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{S}]\boldsymbol{c}\Big) \tag{3-31a}$$

四、混合积的坐标表示法

1. 在空间直角坐标系$O\text{-}xyz$中，设三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的坐标分量为

$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

据两矢量的矢积的行列式表示式(式3-22)，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

再由矢量的标积的坐标表示法，得

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

$$=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

即

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{3-32}$$

这就是$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三矢量的坐标表示式。

2. 根据定理3.3，利用混合积的坐标表示式(3-32)，可得到以下的重要推论：

在空间直角坐标系中，三矢量$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，和$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

我们已在定理2.4中得出这一结论。通过比较可以看出，利用混合积来证明就显得十分简捷。

3. 应用混合积的有关性质来推导四面体的体积公式。

设给定空间中四个点$A(\boldsymbol{r}_1)$、$B(\boldsymbol{r}_2)$、$C(\boldsymbol{r}_3)$及$D(\boldsymbol{r}_4)$。由立体几何学可知，四面体$ABCD$的体积，等于以它的同一顶点上三条棱为边所构成的平行六面体体积

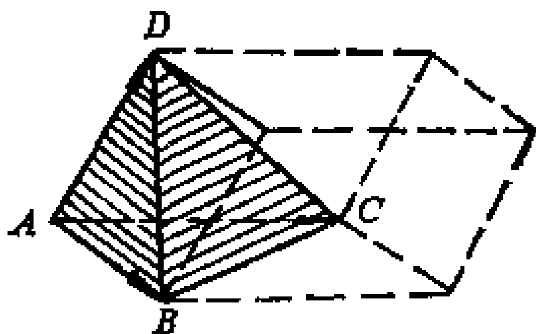


图3-18

的1/6。为此，不妨取以A为顶点的三条棱 AB、AC 和AD(图3-18)。于是根据混合积的几何意义，有

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$$

而

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$
$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$$
$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1$$

则

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)]\cdot(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1)| \tag{3-33}$$

若A、B、C、D四点的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)、(x_3, y_3, z_3) 及(x_4, y_4, z_4)，则该四面体的体积可由下式给出：

$$V_{ABCD}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \tag{3-33a}$$

行列式为正值时取“+”号、为负值时取“-”号。

若所给的四点是共面的，则由它们作顶点的四面体的体积必为零；反之，当以所给四点作顶点的四面体体积为零时，这四点必定共面。于是，由式(3-33)和式(3-33a)，得出四点共面的充要条件是

$$[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)]\cdot(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1)=0 \tag{3-34}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{3-34a}$$

充要条件(式3-34a)与第二章§ 2.2所得到的结论是一致的。

例3.17 给定矢量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$，且$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{p}$是互相垂直的单位矢量。试求以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱所构成的平行六面体的体积。

解法一 根据混合积的性质，有

$$
\begin{aligned}
V&=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|[(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})\times(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{p})]\\
&\quad\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})|\\
&=|[(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})\times2\boldsymbol{m}+(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{n}\\
&\quad+(\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})\times(-3\boldsymbol{p})]\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})|\\
&=|(7\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+8\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{m})\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p})|\\
&=|7(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{p}+8(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{m}+5(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{m})\cdot2\boldsymbol{n}|\\
&=7+8+10\\
&=25
\end{aligned}
$$

这就是所求平行六面体的体积。

解法二 以$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{p}$作为坐标矢量，建立空间直角坐标系，于是$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的坐标分量分别为$\{1,-3,1\}$，$\{2,1,-3\}$和$\{1,2,1\}$。这样，由式(3-32)就有

$$
V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=\begin{vmatrix}1&-3&1\\2&1&-3\\1&2&1\end{vmatrix}
$$

$$=25$$

将以上两种解法加以比较，就可看出利用坐标运算的简便之处。

五、二重矢积

1. 二重矢积的性质

将矢积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$与矢量$\boldsymbol{c}$作矢性相乘，得到$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，叫

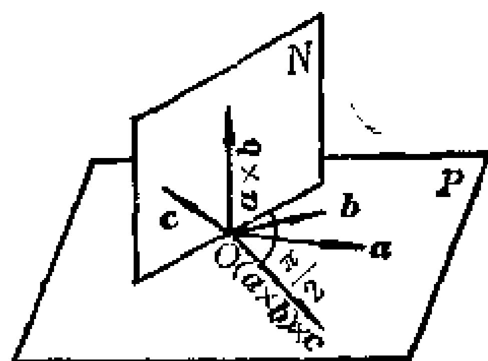


图3-19

做$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三矢量的二重矢积。它既垂直于 $\boldsymbol{c}$，又垂直于 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，因而与$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$和$\boldsymbol{c}$所在平面$N$相垂直。而 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 是垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所在平面P的，因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$是与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面的一个矢量，且垂直于 N和P两个平面的交线(图3-19)

由于$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$三个矢量共面，则根据定理1-6可知，它们线性相关，因而$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$可以唯一地表示成$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的一个线性组合，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

其中系数m，n是待定的，可以利用坐标运算来求出。

取定一空间直角坐标系，设$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，

$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$。由式3-22，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}$$
$$+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}$$

则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=[(z_1x_2-z_2x_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)y_3]\boldsymbol{i}$$
$$+[(x_1y_2-x_2y_1)x_3$$
$$-(y_1z_2-y_2z_1)z_3]\boldsymbol{j}+[(y_1z_2-y_2z_1)y_3-(z_1x_2$$
$$-z_2x_1)x_3]\boldsymbol{k}$$

而

$$(z_1x_2-z_2x_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)y_3$$
$$=x_2z_1z_3+x_2y_1y_3-x_1z_2z_3-x_1y_2y_3$$
$$=(x_1x_2x_3+x_2y_1y_3+x_2z_1z_3)-(x_1x_2x_3+x_1y_2y_3$$
$$+x_1z_2z_3)$$

$$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)x_2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)x_1$$

同理，

$$(x_1y_2-x_2y_1)x_3-(y_1z_2-y_2z_1)z_3$$
$$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)y_2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)y_1$$
$$(y_1z_2-y_2z_1)y_3-(z_1x_2-z_2x_1)x_3$$
$$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)z_2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)z_1$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$

即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad (3\text{-}35)$$

于是，$m=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，$n=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$。

同样地，可得

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \qquad (3\text{-}35a)$$
$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad (3\text{-}35b)$$

对于另一种形式的二重矢积——$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，同样可将它表示成相应的线性组合：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad (3\text{-}36)$$

同理

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad (3\text{-}36a)$$
$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \qquad (3\text{-}36b)$$

将式(3-35)与式(3-36)比较，可知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$是两个完全不同的矢量。因此，在二重矢积中，矢量相乘的顺序是十分重要的，表示运算顺序的括号不能掉换，而必须按括号的顺序进行运算。

综上所述，可得到二重矢积表示成相应的线性组合的规则：

三个矢量的二重矢积等于中间的矢量与两侧两个矢量的

标积的乘积减去括号中另一矢量与其余两矢量的标积的乘积。

2. 几点推论

1）将式(3-35)、(3-35a)及(3-35b)相加，得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=0$$

这表明，若将三矢量的位置加以轮换，则这样所得三个二重矢积之和是零矢量。

2）若三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$正交，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=0\boldsymbol{b}-0\boldsymbol{a}=0$$

由此，对于坐标矢量的二重矢积，有

$$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}=0$$

3）若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，则$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$变为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$。这个矢量位于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所在的平面，且与$\boldsymbol{a}$垂直。因此，由二重矢积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$得到了这样的可能性，就是确定一个方向，使它垂直于已知矢量$\boldsymbol{a}$，且位于和另一矢量所决定的平面内。即有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

于是

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{\boldsymbol{a}^2}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}] \qquad (3\text{-}37)$$

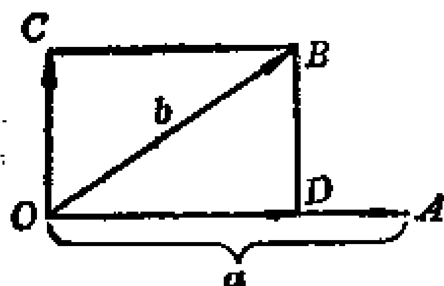


图3-20

这样，我们就得到矢量$\boldsymbol{b}$在矢量$\boldsymbol{a}$和垂直于$\boldsymbol{a}$的方向的分解(图3-20)。$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$的垂直方向的分量为

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^2}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]$$

它的模为

$$|\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

例3.18 计算$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$，其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$为空间任意矢量。

解 令$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{l}$，于是

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\
&=[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{b}\\
&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{b}\\
&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\\
&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})
\end{aligned}
$$

若用行列式表示，即为

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}
$$

特别地，当$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$时，有

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2
$$

而在例3.11中，这个恒等式是利用矢积的定义给予证明的。

例3.19 证明：

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\\ \boldsymbol{a} & [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\end{vmatrix}
$$

其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$为空间任意四个矢量

证 令$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{l}$，则由二重矢积的运算规则，有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{l} &=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l})\boldsymbol{a}\\
&=[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

则

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]
$$

用行列式表示，即为

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\\ \boldsymbol{a} & [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\end{vmatrix}
$$

习　　题

1．已知三矢量 $\boldsymbol{p}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{q}=\{1,-1,3\}$和$\boldsymbol{r}=\{1,-2,0\}$。计算以下各式：

（1）$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}$，（2）$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}$，

（3）$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{r}$。

2．化简下列各矢量式：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]$，

（2）$(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})]$。

3．证明$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$。

4．若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$。试求

（1）$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，　　（2）$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$。

5．证明$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$。

6．证明$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]$。

7．试求以$\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$为棱的平行六面体的体积。

8．一个四面体的顶点为$A(1,1,1)$，$B(-1,1,1)$，$C(1,-1,1)$和$D(1,1,-1)$，求其体积。

9．判断下列各组中的矢量是否共面？

（1）$\boldsymbol{a}=\{3,4,5\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,2\}$，$\boldsymbol{c}=\{9,14,16\}$；

（2）$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}=7\boldsymbol{a}+14\boldsymbol{b}-13\boldsymbol{c}$。其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三矢量两两互相垂直，且模相等。

10．证明$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$，并问在什么条件下等号成立？

11．给定空间四点：$A(1,1,1)$，$B(4,4,4)$，$C(3,5,5)$及$D(2,4,7)$，试求以AB、AC、AD为棱的平行六面体及四面体

$ABCD$的体积。

12. 已知三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$都不等于零，且满足以下的关系：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

试确定它们的相互位置关系。

13. 证明：空间四点$A(1,2,-1)$,$B(0,1,5)$、$C(-1,2,1)$及$D(2,1,3)$在同一平面上。

14. 在三矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$中，$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$间夹角为$30°$，$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=3$。求$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$。

15. 若$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，证明$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

§3.4 张量概念简介

在理论物理、连续介质力学等科学领域内，仅仅引入标量与矢量的概念是不够的，因为其中许多物理量已超出标量与矢量的范围，为此有必要引入另外一种较为复杂的物理量，这就是张量。

一、从物理上引入二阶张量

弹性体发生形变时，其内部一般存在相互挤压和剪切的作用，这种作用力与截面的取向有关。也就是说，即使在同一位置，通过面积相等、但取向不同的面元上的力也是不相同的。弹性力学的任务之一，就是要计算出弹性体内某点通过任意取向的单位面积上的力，从而也就知道该点受挤压和剪切作用的应力状态。下面可以看出，弹性体内任一点上的这种相互作用，可以用张量来描述。

在弹性体内取定一点M，作一包围M在内的微元四面体

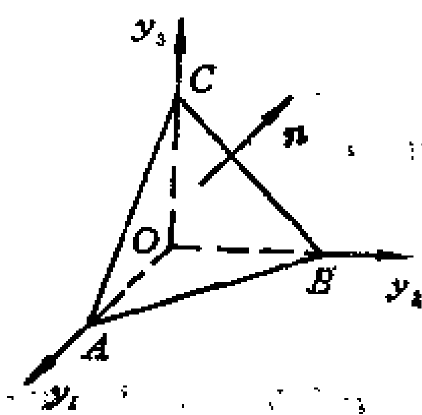


图3-21

$OABC$(图3-21)。为了与其他文献一致,现把直角坐标轴记作y_1,y_2,y_3轴,把矢量的坐标分量的脚标记作1,2,3,把基本单位矢量改写为$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$。图中ABC面可以取任意方向,其外法向矢量为$\boldsymbol{n}$;其余三面分别垂直于y_1轴、y_2轴和y_3轴,且各以相应的轴所指的一方为正。设ABC面的面积为ds_n,而其余三个侧面的面积分别为ds_1,ds_2,ds_3,则

$$ds_1=\beta_{n1}ds_n,\qquad ds_2=\beta_{n2}ds_n$$
$$ds_3=\beta_{n3}ds_n \tag{3-38}$$

其中βn_i为$\boldsymbol{n}$与y_i轴夹角的方向余弦($i=1,2,3$)。

作用于$OABC$上的力,除表面力以外还有质量力。按照定义,表面力与作用面有关,而质量力与微元体的质量有关。当微元体积$OABC$向M点无限收缩时,质量力和表面力相比为高阶无穷小,故可忽略不计,只需计及表面力。此外,由于存在切应力,表面力不和作用面垂直。

设$\boldsymbol{T}_n$、$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$、$\boldsymbol{T}_3$分别为各对应表面上的应力。由于ABC面的外法线方向与所取的$\boldsymbol{n}$方向一致,故表面力取正号,为$ds_n\boldsymbol{T}_n$;其他三个面则不同,它们的外法线方向和所取的坐标轴方向相反,因而这三个面上的表面力应取负号,即分别为

$$-ds_1\boldsymbol{T}_1;\qquad -ds_2\boldsymbol{T}_2;\qquad -ds_3\boldsymbol{T}_3$$

于是,微元四面体$OABC$的力平衡方程(略去质量力)应为

$$ds_n\boldsymbol{T}_n-ds_1\boldsymbol{T}_1-ds_2\boldsymbol{T}_2-ds_3\boldsymbol{T}_3=0 \tag{3-39}$$

将式(3-38)代入,得

$$\boldsymbol{T}_n = \beta_{n1}\boldsymbol{T}_1 + \beta_{n2}\boldsymbol{T}_2 + \beta_{n3}\boldsymbol{T}_3 \tag{3-40}$$

设$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$、$\boldsymbol{T}_3$在y_1、y_2、y_3坐标轴的分量分别为

$$T_{11}, T_{12}, T_{13}; \quad T_{21}, T_{22}, T_{23};$$

$$T_{31}, T_{32}, T_{33}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_n &= \beta_{n1}(T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_3) \\ &\quad + \beta_{n2}(T_{21}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{23}\boldsymbol{e}_3) \\ &\quad + \beta_{n3}(T_{31}\boldsymbol{e}_1 + T_{32}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3) \\ &= \sum_{i,j}\beta_{ni}T_{ij}\boldsymbol{e}_j\end{aligned} \tag{3-41}$$

上式给出外法线为$\boldsymbol{n}$的表面上的应力与三坐标面上九个应力T_{ij}的关系。它表明，只要知道T_{ij}的九个应力，就可算出任意给定取向的表面上的应力，于是M点的应力状态也就完全清楚。因此，描述一点应力状态的上述九个有序数组就构成一个张量，称为该点处的应力张量。

弹性体内点的应力状态之所以要九个数来表示，是因为在考察通过弹性体内任一面元的力时，既要考虑面元的方向，又要考虑通过这个面元的力的方向。正是由于这种二重取向的特定性，使得这类物理量在三维空间成为需要九个数来描述的二阶张量。

二、张量及其运算

1. 张量的表示法

前面我们讨论了矢量的两种乘法，即两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的点积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$与叉积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。现引入两矢量的另外一种乘法——并排相乘，即

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \overrightarrow{A}\ \overrightarrow{B} \tag{3-42}$$

也叫做$\vec{A}$和$\vec{B}$的并矢

若$\vec{A}$、$\vec{B}$都是三维空间矢量，即可表示为

$$\vec{A}=\boldsymbol{e}_1A_1+\boldsymbol{e}_2A_2+\boldsymbol{e}_3A_3$$
$$\vec{B}=\boldsymbol{e}_1B_1+\boldsymbol{e}_2B_2+\boldsymbol{e}_3B_3$$

则

$$\begin{aligned}\vec{\vec{T}}&=(\boldsymbol{e}_1A_1+\boldsymbol{e}_2A_2+\boldsymbol{e}_3A_3)(\boldsymbol{e}_1B_1+\boldsymbol{e}_2B_2+\boldsymbol{e}_3B_3)\\&=A_1B_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+A_1B_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+A_1B_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+A_2B_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\\&\quad+A_2B_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+A_2B_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+A_3B_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+A_3B_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\\&\quad+A_3B_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\tag{3-43}$$

这个并矢$\vec{\vec{T}}$叫做三维空间的二阶张量，共有九个分量。显然，并矢$\vec{A}\vec{B}$不等于并矢$\vec{B}\vec{A}$。

张量既可用并矢来表示，也可写成矩阵形式，这一情况与矢量相似。例如，当用矩阵来表示矢量$\vec{A}$时，$\vec{A}$的三个分量可写成一个列矩阵，如$\vec{A}$表为$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$；用矩阵表示张量$\vec{\vec{T}}$时，即将它的九个分量排成一个方阵，如

$$\vec{\vec{T}}=\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{pmatrix}\tag{3-44}$$

将二阶张量矩阵与矢量矩阵对比，可以看出，矢量的分量为一标量，而二阶张量的分量则是矢量。

若以r表示维数，以n表示幂次，则对于三维空间，一切物理量的分量数可统一表示成

$$r^n$$

其中

标量只有一个分量时，对应于$n=0$，即$3^n=3^0=1$；

矢量有三个分量时，对应于$n=1$，即$3^n=3^1=3$；

应力有九个分量时，对应于$n=2$，即$3^n=3^2=9$。

为了便于讨论，可将n作为这些物理量的阶次，并统一称这些物理量为张量。于是，标量可称为零阶张量，矢量为一阶张量，应力为二阶张量。还可构成三阶以至n阶张量，$3^3=27$，故三阶张量有27个分量。不过，二阶以上的张量已不可能象矢量那样有明显的几何意义。此外，如果张量是以正交的笛卡儿坐标来表示的，就称为仿射正交张量。

2. 几种特殊的二阶张量

1）单位张量I

若二阶张量T，其元素T_{ij}满足

$$T_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{4-45}$$

则此张量称为单位张量。一般用I表示，即有

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4-46}$$

2）对称张量

若张量T中任一张量元素的值，不因此元素的脚标相互置换而改变，即满足

$$T_{ij}=T_{ji} \tag{4-47}$$

则称此张量为对称张量。它具有六个独立分量。

3）反对称张量

若张量T中任一张量元素由于脚标的相互置换而改变符号，即有

$$T_{ij}=-T_{ji} \tag{4-48}$$

则称此张量为反对称张量。它的主对角线上的各分量等于零，且只有三个独立分量。

3. 二阶张量的代数运算

1）张量的加、减

张量T与张量P之和或差，乃是以$(T_{ij}\pm P_{ij})$为分量所成的张量，即

$$T\pm P=\sum_{i,j}(T_{ij}\pm P_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (4\text{-}49)$$

可见，张量的加法服从交换律和结合律。

2）标量与张量相乘

标量u与张量T之积，是以u乘T的各分量T_{ij}所成的张量，即

$$uT=\sum_{i,j}uT_{ij}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \qquad (4\text{-}50)$$

3）矢量与张量的点乘

矢量$\boldsymbol{f}$对张量T作点乘运算时，遵从相邻量之间发生作用的原则，即仅与构成张量的相邻矢量作运算，如

$$\boldsymbol{f}\cdot T=\boldsymbol{f}\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\boldsymbol{f}\cdot\vec{A})\vec{B} \qquad (4\text{-}51)$$

而

$$T\cdot\boldsymbol{f}=(\vec{A}\vec{B})\cdot\boldsymbol{f}=(\vec{B}\cdot\boldsymbol{f})\vec{A}$$

即有

$$\boldsymbol{f}\cdot T\neq T\cdot\boldsymbol{f}$$

因此，在点乘过程中，前后次序不能调换。

4）矢量与张量的叉乘

矢量$\boldsymbol{f}$对张量T作叉乘时，也仅与构成张量的相邻矢量作运算，如

$$\boldsymbol{f}\times T=\boldsymbol{f}\times(\vec{A}\vec{B})=(\boldsymbol{f}\times\vec{A})\vec{B} \qquad (4\text{-}52)$$

同样有

$$f\times T \neq T\times f$$

5）张量与张量的点乘

设$T=\vec{A}\vec{B}$，$P=\vec{C}\vec{D}$，分为一次点乘与二次点乘，仍遵从相邻量发生作用的原则。

$$T\cdot P=(\vec{A}\vec{B})\cdot(\vec{C}\vec{D})=(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}\vec{D} \tag{4-53}$$

可见，两个二阶张量经过一次点乘后仍为二阶张量。

$$T:P=(\vec{A}\vec{B}):(\vec{C}\vec{D})=(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D}) \tag{4-54}$$

所以二次点乘是一标量。

第四章　矢性函数的微分和积分

在物理学、力学领域内，仅仅研究一般的数量与数量之间的关系显然是不够的，因为有许多问题还涉及到矢量与数量之间的依赖关系。例如，在经典力学中，为了描述质点的运动状态，就需要知道随时间而改变的位置矢量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$和速度矢量$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$。又如，在非均匀电场中，电场强度是随空间中的点而改变的矢量，我们研究电场，就要知道电场强度$\boldsymbol{E}$和点M的依赖关系$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(M)$。

从内容上来看，矢量包括两个部分，即矢量代数及矢量分析。以上三章讨论了矢量代数部分，它的对象是常矢量，也就是模和方向都保持不变的矢量。以下几章讨论矢量分析部分，其对象是所谓的变矢量，即模和方向都会发生变化的矢量。

本章所讨论的内容是以后各章的基础，同时也是研究许多自然学科常用的一种工具。矢性函数的微分和积分的概念，实际上与普通(数性)函数完全类似。因此，我们在学习过程中，不妨与普通(数性)函数微积分的概念加以联系和对照，这样就不会遇到什么困难。

§4.1　矢性函数的概念

我们知道，数学分为常量和变量两类。对于矢量，同样也可分为常矢量及变矢量。常矢量的模和方向都不改变，例如质点作等速直线运动时，它的速度就是一个常矢量。所谓变矢

量，是指在所讨论的问题中，其模和方向，或者其中之一会改变的矢量。例如，在变速直线运动中，速度的大小(速率)是变化的；在匀速曲线运动中，速度的方向是变化的；而在变速曲线运动中，速度的大小和方向都是变化的，对于所有以上这三种情况来说，速度都是变矢量。

一、矢性函数的定义

为了研究变矢量与某一数量的函数关系，在变矢量概念的基础上，我们引入矢性函数的概念，定义如下：

定义 设有一变矢量$\boldsymbol{a}$和一数性变量t，如果对于t在区间(t_1,t_2)内取定的每一个值，都有一个确定的矢量$\boldsymbol{a}$和它对应，则称$\boldsymbol{a}$为数性变量t的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t) \tag{4-1}$$

而区间$(t_1 t_2)$称为矢性函数$\boldsymbol{a}$的定义域。

在物理学和力学中，有关矢性函数的例子是很多的。比如质点作变速运动时，速度$\boldsymbol{v}$是时间t的函数，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$；沿一直线考察流体的稳定流动时，流速$\boldsymbol{v}$是这条直线上坐标$x$的函数，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x)$。又如，一物体受变力$\boldsymbol{F}$的作用，沿$x$轴从$x_1$运动到$x_2$，这时变力$\boldsymbol{F}$以及速度$\boldsymbol{v}$都是坐标$x$的函数，即$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x)$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x)$，而区间$(x_1,x_2)$是它们的定义域。

取一空间直角坐标系$O\text{-}xyz$，将矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$沿三个坐标轴进行分解。显然，所得的三个分量都是t的数性函数，我们分别用$\boldsymbol{a}_x(t)$、$\boldsymbol{a}_y(t)$和$\boldsymbol{a}_z(t)$来表示，它们也就是$\boldsymbol{a}(t)$的三个坐标分量。于是，可以写出矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的坐标表示式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)&=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x(t),a_y(t),a_z(t)\}\end{aligned} \tag{4-2}$$

其中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$是沿三个坐标轴的单位矢量，称为基本单位矢量

(或坐标矢量)。由式(4-2)可知，给定一个矢性函数，相当于给定三个数性函数。

二、 曲线的参数方程

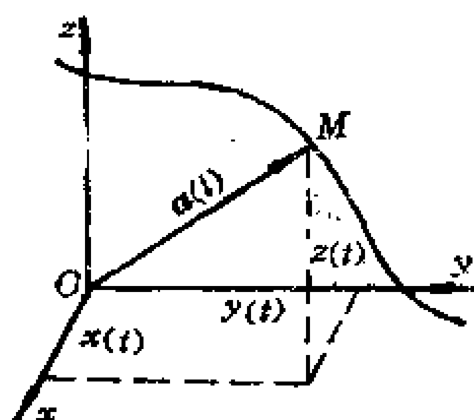


图4-1

为了能用图形直观地表示矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的变化情况，我们将$\boldsymbol{a}(t)$的起点取为坐标原点O。这样，当t变化时，$\boldsymbol{a}(t)$的终点就随之而改变，并描绘出一条曲线l(图4-1)。这条曲线称为矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的矢端曲线，而式(4-1)或式(4-2)就称为此曲线的矢量方程。

前已述及，一个以坐标原点O为起点、以M为终点的矢量$\overrightarrow{OM}$，通常就叫做点M的位矢，且以$\boldsymbol{r}$表示：

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\} \tag{4-3}$$

若终点M的坐标x,y,z都是t的函数，则有

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\} \tag{4-4}$$

当把矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的起点取为坐标原点时，那么$\boldsymbol{a}(t)$实际上就成为其终点M的位矢，即

$$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

于是，根据位矢的特性，它的三个坐标分量$a_x(t)$、$a_y(t)$和$a_z(t)$，正好对应地等于终点M的三个坐标$x(t)$，$y(t)$及$z(t)$，即有

$$\begin{cases} x(t)=a_x(t) \\ y(t)=a_y(t) \\ z(t)=a_z(t) \end{cases} \tag{4-5}$$

这就是曲线l以t为参数的参数方程。

如果矢量只是模变化，而方向不变，那么它的矢端曲线是通过极点O的射线(半直线)(图4-2)。反之，若矢量的模不变，而只改变方向，则在这种情况下，矢端曲线是位于以极点O为中心，以模为半径的球面上的某一曲线(图4-3)。

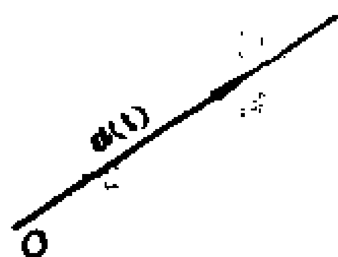


图4-2

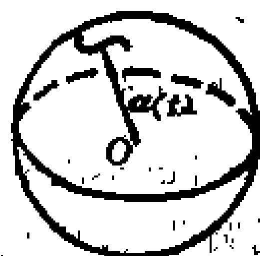


图4-3

容易看出，在曲线l的矢量方程〔式(4-2)〕和参数方程〔式(4-5)〕之间，显然具有一一对应的关系。因此，只要知道其中的任一个方程，就可根据对应关系，立即得到另一个方程。例如椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的参数方程为

$$x=a\cos\theta,y=b\sin\theta \qquad (0\leqslant\theta<2\pi)$$

则它的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,b\sin\theta\}$$

其他常见的如圆、抛物线、双曲线及摆线等，亦可按类似推理得出。

下面我们来确定矢端曲线的方向。

设有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad (t_1<t<t_2)$$

当t从t_1变到t_2时，若$\boldsymbol{r}(t)$的终点描绘出从M_1到M_2的一条曲

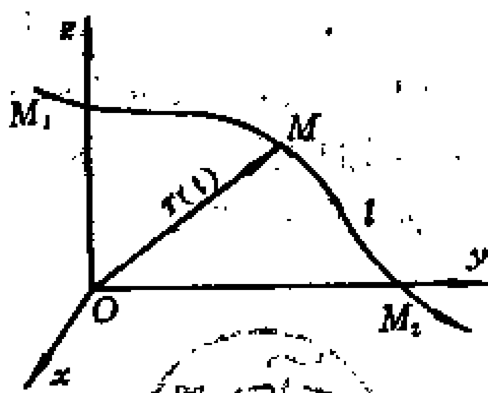


图 4-4

线l（图4-4），则从M_1沿曲线l到M_2的方向称为该曲线的正向。显然，参数t的值增加的一方，也就对应于曲线正向的那一方。规定了正向的曲线叫做有向曲线。例如，由矢量方程

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta, b\sin\theta\} \qquad (0\leqslant\theta<2\pi)$$

所表示的椭圆曲线，其正向为逆时针方向。

§ 4.2 矢性函数的极限和连续性

一、矢性函数的极限的定义

定义 设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在t_0的某个邻域有定义（但在t_0处可以没有定义），$\boldsymbol{a}_0$为一常矢量。若对于每个任意给定的正数ε，都存在一个正数δ，使得当t满足$0<|t-t_0|<\delta$时，就有

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_0|<\varepsilon$$

成立，那末我们说，当$t\to t_0$时，矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$以$\boldsymbol{a}_0$为极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0 \qquad (4\text{-}6)$$

二、极限的运算法则

不难看出，上述定义与数性函数极限的定义完全类似。因此，我们由数性函数极限的运算法则，就可得出矢性函数极限的相应的运算法则。

设$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$为矢性函数，$\lambda(t)$为数性函数，且当$t\to t_0$时，$\lambda(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$都有极限存在，于是有

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \quad (4\text{-}7)$$

即两个矢性函数的和(或差)的极限，等于它们的极限之和(或差)。

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \quad (4\text{-}8)$$

即矢性函数与数性函数的乘积的极限，等于它们的极限的乘积。

特别地，当λ为常数时，有

$$\lim_{t\to t_0}\lambda\boldsymbol{a}(t)=\lambda\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \quad (4\text{-}9)$$

即常数因子可以提到极限符号的外面。

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \quad (4\text{-}10)$$

即两矢性函数的标积的极限，等于它们的极限的标积。

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \quad (4\text{-}11)$$

即两矢性函数的矢积的极限，等于它们的极限的矢积。

由于矢积具有反交换性，故式(4-11)中两个乘数的次序不可随意交换。

根据极限的定义和有关矢量运算的规律，上述极限运算法则是不难给予证明的。下面我们来证明式(4-10)及式(4-11)。

(1) 证明式(4-10)：$\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot$

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

证 设

$$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),a_y(t),a_z(t)\}$$
$$\boldsymbol{b}(t)=\{b_x(t),b_y(t),b_z(t)\}$$

于是

$$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)=a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+a_z(t)b_z(t)$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]&=\lim_{t\to t_0}[a_x(t)b_x(t)+a_y(t)b_y(t)+\\&\qquad a_z(t)b_z(t)]\\&=\{\lim_{t\to t_0}a_x(t),\lim_{t\to t_0}a_y(t),\lim_{t\to t_0}a_z(t)\}\\&\quad\{\lim_{t\to t_0}b_x(t),\lim_{t\to t_0}b_y(t),\lim_{t\to t_0}b_z(t)\}\\&=\lim_{t\to t_0}\{a_x(t),a_y(t),a_z(t)\}\cdot\lim_{t\to t_0}\\&\quad\{b_x(t),b_y(t),b_z(t)\}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)。$$

（2）证明式(4-11)：$\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$。

证　设$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为确定的常矢量。

考察矢量$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)$与矢量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$之差的模：

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&\qquad=|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}-\\&\qquad\quad\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&\qquad=|\boldsymbol{a}(t)\times[\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{b}|\\&\qquad\leqslant|\boldsymbol{a}(t)\times[\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}]|+|[\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}]\end{aligned}$$

$\times \boldsymbol{b}|$ [1]

$\leqslant |\boldsymbol{a}(t)| \cdot |\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ [2]

由假设，根据极限的定义，对于任意$\varepsilon>0$，存在着正数δ_1和δ_2，当$0<|t-t_0|<\delta_1$ 及$0<|t-t_0|<\delta_2$时，则有

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon \quad 及 \quad |\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}|<\varepsilon \tag{4-12}$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$0<|t-t_0|<\delta$时，式(4-12)中的两个不等式同时成立。

由于$|\boldsymbol{a}(t)|-|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$，不妨取$\varepsilon=1$，则

$$|\boldsymbol{a}(t)|\leqslant|\boldsymbol{a}|+1\leqslant A$$ [3]

其中$A=\max\{|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}|+1\}$，由此有

$$|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}(t)|\cdot|\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}|<2A\varepsilon$$

则

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t)$$

现将$\boldsymbol{a}(t)$和$\boldsymbol{a}_0$写成坐标表示式：

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}_0=a_{0x}\boldsymbol{i}+a_{0y}\boldsymbol{j}+a_{0z}\boldsymbol{k}$$

如果

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0$$

则

---

① 利用不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

② 利用不等式$|a\times b|=|a||b|\sin\langle a,b\rangle\leqslant|a||b|$。

③ 这就是说，$a(t)$在t_0的某个邻域内，其模为有界量。

$$\lim_{t\to t_0}[a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}]$$

$$=\lim_{t\to t_0}a_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}a_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}a_z(t)\boldsymbol{k}$$

$$=a_{0x}\boldsymbol{i}+a_{0y}\boldsymbol{j}+a_{0z}\boldsymbol{k}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to t_0}a_x(t)=a_{0x},\\&\lim_{t\to t_0}a_y(t)=a_{0y}\\&\lim_{t\to t_0}a_z(t)=a_{0z}\end{aligned}\tag{4-13}$$

反之，如果式(4-13)成立，则

$$\lim_{t\to t_0}\sqrt{[a_x(t)-a_{0x}]^2+[a_y(t)-a_{0y}]^2+[a_z(t)-a_{0z}]^2}=0$$

即

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_0|=0$$

所以

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0$$

由此得到以下的重要结论：矢性函数$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),a_y(t),a_z(t)\}$，当$t\to t_0$时，趋于极限$\boldsymbol{a}_0=\{a_{0x},a_{0y},a_{0z}\}$的充要条件是

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0}a_x(t)=a_{0x}\\\lim\limits_{t\to t_0}a_y(t)=a_{0y}\\\lim\limits_{t\to t_0}a_z(t)=a_{0z}\end{cases}$$

综上所述，对于矢性函数极限问题的研究，可以转化为对数性函数(即矢性函数的三个分量)的极限的研究。

三、矢性函数的连续性

定义 设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在点t_0的某个邻域有定义，且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(t_0)$$

则称$\boldsymbol{a}(t)$在$t=t_0$处连续。

在区间(t_1,t_2)上的每一点都连续的矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$，称为在该区间上是连续的。

根据极限运算法则可知，如果数性函数$\lambda(t)$与矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$都在t_0处连续，或者都在区间(t_1,t_2)上连续，那么，诸如$\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)$，$\lambda(t)\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)$，$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)$等函数也都在$t_0$处连续，或者都在区间$(t_1,t_2)$上连续。

由以上的讨论可以看出，矢性函数$\boldsymbol{a}(t)=\{a_x(t),a_y(t),a_z(t)\}$在区间$(t_1,t_2)$上连续的充要条件，是数性函数$a_x(t)$、$a_y(t)$及$a_z(t)$都在该区间上连续。据此，对一矢性函数在某一区间上是否连续这一问题的研究，就可转化为研究它的三个分量（数性函数）在该区间上是否连续的问题。

显然，连续矢性函数的图形是一条连续曲线；而连续曲线所对应的矢量参数方程，就是关于某个数性参量的连续矢性函数。

今后，本书所讨论的矢性函数，我们都认定它是连续的。

§4.3 矢性函数的微分法

在物理学和力学中，常常需要研究有关矢性函数变化率的问题，例如，加速度就是速度矢量对时间的变化率。矢性函数的导数就是描述该变矢量对数性自变量的变化率的。为此，

下面我们来建立矢性函数的导数与微分的概念，以及求导数与微分的运算法则。实际上，它们跟数性函数中对应的概念和运算法则并无区别。

一、矢性函数的导数

设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$是数性变量t的函数，t在区间(t_1, t_2)上变化，$\boldsymbol{a}(t)$在该区间上连续。当数性变量从t变到$t+\Delta t(\Delta t \neq 0)$时，对应的矢性函数为$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)$。则

$$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)$$

叫做矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的增量，记作$\Delta \boldsymbol{a}$，即

$$\Delta \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)$$

由此，可给出矢性函数的导数的定义如下：

定义 设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在点t处的增量与对应的增量Δt之比

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

当$\Delta t \to 0$时，其极限存在，则称此极限为矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在点t处的导数。记作$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$或$\boldsymbol{a}'(t)$，即

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\boldsymbol{a}'(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} \tag{4-14}$$

如果$\boldsymbol{a}(t)$由坐标表示式给出

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则

$$\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}=\frac{a_x(t+\Delta t)-a_x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{a_y(t+\Delta t)-a_y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{a_z(t+\Delta t)-a_z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

即

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}=\frac{\Delta a_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta a_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta a_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

若$\frac{\Delta a_x}{\Delta t}$，$\frac{\Delta a_y}{\Delta t}$，$\frac{\Delta a_z}{\Delta t}$的极限存在，于是令$\Delta t\to 0$，两边取极限，就得到导数$\boldsymbol{a}'(t)$的坐标表示式

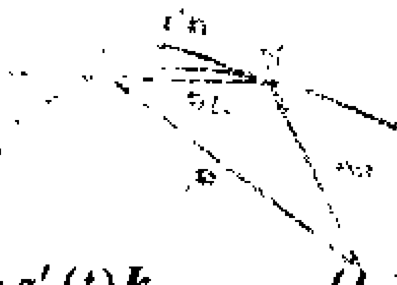
$$\boldsymbol{a}'(t)=a'_x(t)\boldsymbol{i}+a'_y(t)\boldsymbol{j}+a'_z(t)\boldsymbol{k} \tag{4-15}$$

因此，矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在点t处可导的充要条件，是数性函数$a_x(t)$、$a_y(t)$及$a_z(t)$在点t处可导。

由式(4-15)可知，导数$\boldsymbol{a}'(t)$仍然是一个矢量，故$\boldsymbol{a}'(t)$又称为矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在点t处的导数矢量，简称导矢。因此，求一矢性函数的导矢，归结为求三个数性函数的导数。

特别地，对于位矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$



我们有

$$\boldsymbol{r}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k} \tag{4-16}$$

跟数性函数一样，如果$\boldsymbol{a}(t)$对于区间(t_1,t_2)上的每个t值都可导，则称$\boldsymbol{a}(t)$在该区间上是可导的，而$\boldsymbol{a}'(t)$称为$\boldsymbol{a}(t)$的导函数。如果导函数$\boldsymbol{a}'(t)$可导，再求它的导数，记作$\boldsymbol{a}''(t)$，叫做$\boldsymbol{a}(t)$的二阶导函数。还可推广到三阶及更高阶，它们也有类似于式(4-15)的形式，例如

$$\boldsymbol{a}''(t)=a_x''(t)\boldsymbol{i}+a_y''(t)\boldsymbol{j}+a_z''(t)\boldsymbol{k} \tag{4-17}$$

例4.1 圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}$$

其中a和b都是常数，求$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}$与$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{d\theta^2}$。

解

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}=\boldsymbol{r}'(\theta)=\frac{da\cos\theta}{d\theta}\boldsymbol{i}+\frac{da\sin\theta}{d\theta}\boldsymbol{j}+\frac{db\theta}{d\theta}\boldsymbol{k}$$

$$=-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\theta\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\theta^2}=\boldsymbol{r}''(\theta)=\frac{d(-a\sin\theta)}{d\theta}\boldsymbol{i}+\frac{da\cos\theta}{d\theta}\boldsymbol{j}+\frac{db}{d\theta}\boldsymbol{k}$$

$$=-a\cos\theta\boldsymbol{i}-a\sin\theta\boldsymbol{j}+0$$

$$=-a(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})$$

二、导矢的几何意义

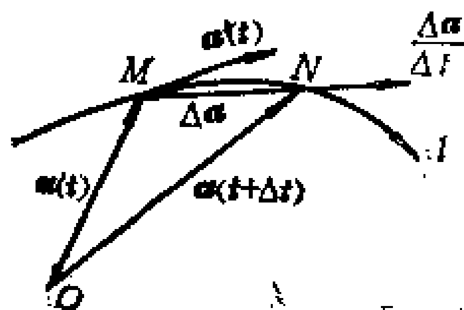


图4-5

由假设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在区间(t_1,t_2)上连续，因而对于该区间上的每一个t值，都有一个确定的$\boldsymbol{a}(t)$。当t有增量Δt时，$\boldsymbol{a}(t)$连续地变为$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)$。为了便于比较，可将它们的始点放到一起，于是当$t$从$t_1$变到$t_2$时，其终点就描绘出一条有向的连续曲线（图4-5）。设M是曲线l上对应于t的一点，N是对应于$t+\Delta t$的另一点，则有

$$\boldsymbol{a}(t)=\overrightarrow{OM}$$

$$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$$

于是

$$\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)=\Delta\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}$$

式中$\overrightarrow{MN}$是割线$\overline{MN}$上的一个矢量，用Δt除两端，得

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

显然，矢量$\frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}$仍然位于割线上，且指向$t$增大的一方，即曲线$l$的正向那一方。在$\Delta t\to 0$时，由于割线$\overline{MN}$绕点$M$转动，并且以点$M$处的切线为其极限位置。因此，在割线$\overrightarrow{MN}$上的矢量$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}$，其极限位置，自然也就在此切线上，于是有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\boldsymbol{a}'(t)$$

由此得到以下的结论：导矢$\boldsymbol{a}'(t)$位于曲线l在点M处的切线上，其方向恒指向t增大的一方，即曲线正向的那一方。导矢在几何上为一切向矢量。

三、位矢函数$\boldsymbol{r}(t)$的导矢$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的物理意义

设一质点沿曲线l运动，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$是运动方程。在时刻$t$，质点位于点$M$，而在时刻$t+\Delta t$，则位于点$N$（图4-6）。于是，$\Delta t$所对应的增量为

$$\overrightarrow{MN}=\Delta\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

它表示质点在Δt时间内的位移。以Δt除之，得

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

不难看出，这是质点在Δt时间内的平均速度。若令$\Delta t\to 0$，取

极限，得极限值

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}'(t) \qquad (4\text{-}18)$$

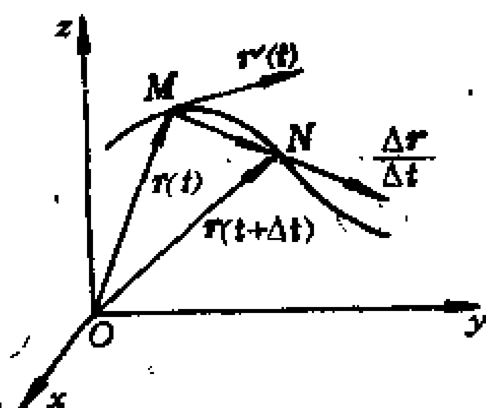


图4-6

这是质点在时刻t的（瞬时）速度，也就是质点在点M处的速度。因此，位矢函数$\boldsymbol{r}(t)$对时间t的一阶导数$\boldsymbol{r}'(t)$表示速度，而$\boldsymbol{r}(t)$对时间t的二阶导数$\boldsymbol{r}''(t)$则表示加速度。

四、矢性函数的微分

设有矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$，与定义数性函数的微分一样，我们把

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt \qquad (4\text{-}19)$$

称为矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在t处的微分，其中

$$dt=\Delta t$$

是数性变量t的增量①。

由于微分$d\boldsymbol{a}$是导矢$\boldsymbol{a}'(t)$与增量Δt的乘积，因而它是矢量，且和导矢$\boldsymbol{a}'(t)$共线。这也就是说，它和导矢$\boldsymbol{a}'(t)$一样，在点M处与曲线l相切（图4-7）。它的指向是这样确定的：当$dt>0$时，它与$\boldsymbol{a}'(t)$的方向一致；而当$dt<0$时，则与$\boldsymbol{a}'(t)$的方向相反。

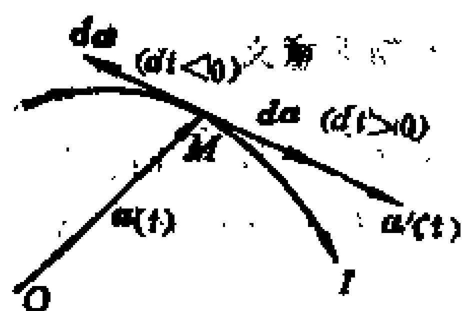


图4-7

容易看出，矢性函数的微分也可通过它的三个分量的微分表示出来。由式(4-15)，有

①根据数性函数微分的定义，自变量的微分与增量是相等的。

$$d\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}'(t)dt$$

$$=a_x'(t)dt\boldsymbol{i}+a_y'(t)dt\boldsymbol{j}+a_z'(t)dt\boldsymbol{k}$$

所以

$$d\boldsymbol{a}(t)=da_x\boldsymbol{i}+da_y\boldsymbol{j}+da_z\boldsymbol{k} \tag{4-20}$$

矢性函数$a(t)$的微分的模为

$$|d\boldsymbol{a}|=\sqrt{da_x^2+da_y^2+da_z^2} \tag{4-21}$$

特别地，对于位矢函数$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，它的微分为

$$d\boldsymbol{r}(t)=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k} \tag{4-22}$$

它的模为

$$|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \tag{4-23}$$

例4.2 设 $\boldsymbol{r}=a\{t-\sin t,\cos t\}$，求$d\boldsymbol{r}$，$|d\boldsymbol{r}|$.（$a$为常量）

解

$$d\boldsymbol{r}=a\{d(t-\sin t),d\cos t\}$$

$$=a\{(1-\cos t)dt,-\sin tdt\}$$

$$=a\{1-\cos t,-\sin t\}dt$$

$$|d\boldsymbol{r}|=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

五、矢性函数的导数公式

设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$及数性函数$u(t)$都可导，则不难验证，下列各求导公式成立：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{k}=0 \quad（\boldsymbol{k}为常矢） \tag{4-24}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \tag{4-25}$$

$$\frac{d}{dt}(c\boldsymbol{a})=c\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\quad(c\text{为常数})\tag{4-26}$$

$$\frac{d}{dt}(u\boldsymbol{a})=\frac{du}{dt}\boldsymbol{a}+u\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\tag{4-27}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}\tag{4-28}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}\text{①}\tag{4-29}$$

若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，而$u=u(t)$，则$\boldsymbol{a}$通过中间变量$u$而成为$t$的复合函数。复合函数的求导法则为

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{du}\;\frac{du}{dt}\tag{4-30}$$

在求导公式（4-28）中，若$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{b}(t)$，则得到一个有用的特例：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{d\boldsymbol{a}^2}{dt}=2a\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\tag{4-31}$$

以上这些公式的证明方法，与微积分学中数性函数的类似公式的证法完全相同。下面仅就公式（4-28）及公式（4-29）加以验证。

（1）验证公式（4-28）。

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}-\\&\quad\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

以Δt除两边，则

①由于矢积具有反交换性，故每一项中乘数的次序不能任意交换。

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\Delta t}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，取极限，于是得

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}+0\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

所以

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}$$

（2）验证公式(4-29)。

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}\\&\quad-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

两边以Δt除之，令$\Delta t\to 0$，取极限，则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t})+\lim_{\Delta t\to 0}(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b})\\&\quad+\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t})\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}$$

例4.3 设$\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$及$\boldsymbol{c}(t)$都是可微函数，试证：

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a},\frac{d\boldsymbol{b}}{dt},\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right]$$

证 由矢量混合积的定义，有

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right]$$

$$=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d}{dt}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

$$=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right)$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a},\frac{d\boldsymbol{b}}{dt},\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right]$$

例4.4 设$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,ct\}$，$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}$，其中$a$和$c$都是常数。求$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|$。

解 $$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\ \frac{dt}{ds}$$

$$=\{-a\sin t,a\cos t,c\}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left\{-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}},c\right\}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left|\left\{-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}},\right.\right.$$

$$\left.\left. a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}, c\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\sqrt{\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2+\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2+c^2}$$

$$= 1$$

例4.5 证明矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$的模不变的充要条件是$\boldsymbol{a}$与$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$垂直。

证 若$|\boldsymbol{a}|$=常数，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=\text{常数}$$

两边对t求导，有

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$$

$$=\frac{d|\boldsymbol{a}|^2}{dt}=0$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$$

即$\boldsymbol{a}$与$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$垂直，故必要性成立。

反之，若$\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$，则

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}^2=0$$

从而

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=常数$$

即有

$$|\boldsymbol{a}|=常数$$

因而条件是充分的。

由此可知，定长的矢量$\boldsymbol{a}(t)$与其导矢互相垂直。特别地，对于单位矢量$\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}^0(t)$，有

$$\boldsymbol{a}^0\perp\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$$

例4.6 证明只受有心力作用的质点，对中心的动量矩不变。

证 任何作用线通过某一定点的力，就叫做有心力，例如太阳对行星的引力就是有心力。设质点的质量为m，运动速度为$\boldsymbol{v}$，而$\boldsymbol{r}$为质点相对于力中心的位矢，则质点对于力中心的动量矩为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}$$

按牛顿运动定律，$d(m\boldsymbol{v})/dt$等于质点所受的力$\boldsymbol{F}$，它与$\boldsymbol{r}$共线，又$d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{v}$，因而上式右边两项都为零，于是$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=0$，故$\boldsymbol{G}$为常矢量。

§4.4 对导矢的进一步讨论

一、导矢在两个方向的分解

根据矢量的代数性质，任一矢量$\boldsymbol{a}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{a}(t)=a(t)\boldsymbol{a}^0(t)$$

其中$\boldsymbol{a}^0(t)$是与$\boldsymbol{a}(t)$同向的单位矢量。对上式两边求导数，得

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{da}{dt}\boldsymbol{a}^0+a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt} \tag{4-32}$$

这样，就将导矢$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$分解为两个分矢量之和。其中第一个矢量的模是$\left|\frac{da}{dt}\right|$，当$\frac{da}{dt}>0$时，它的方向与$\boldsymbol{a}^0(t)$同向；当$\frac{da}{dt}<0$时，则与$\boldsymbol{a}^0(t)$反向。至于第二个矢量$a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$，其大小和方向都依赖于$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$的大小及方向。

由于

$$\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{a}^0=1$$

对恒等式的两边求导，得

$$2\boldsymbol{a}^0\cdot\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}=0$$

则有

$$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}\perp\boldsymbol{a}^0 \tag{4-33}$$

即$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$与单位矢量$\boldsymbol{a}^0$正交，这个结论对一切其模为常数的矢性函数都成立。

考察$\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$的模。为此，过任一点$M$作矢量$\boldsymbol{a}^0(t)$和$\boldsymbol{a}^0(t+\Delta t)$，其夹角为$\Delta\varphi$(图4-8)，$\Delta\boldsymbol{a}^0$为等腰三角形的底边，其模等于$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$。所以

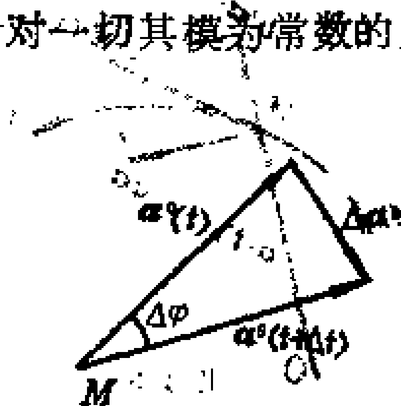


图4-8

$$\left|\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{a}^0|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t\cdot\frac{\Delta\varphi}{2}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

若以k表示矢量旋转角$\Delta\varphi$与参数t的增量Δt之比的极限值，即

$$k = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

则有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}\right| = k$$

因此，矢量$a\frac{d\boldsymbol{a}^0}{dt}$的模等于$ak$，方向与$\boldsymbol{a}^0$垂直。

根据以上的讨论及式（4-32）可知，导矢$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$可以分解为两个矢量，其中一个分矢量平行于$\boldsymbol{a}(t)$，模为$\left|\frac{da}{dt}\right|$；另一分矢量与$\boldsymbol{a}(t)$垂直，模为$ak$，如图 4-9 所示（图中设$\boldsymbol{a}'(t)>0$）。

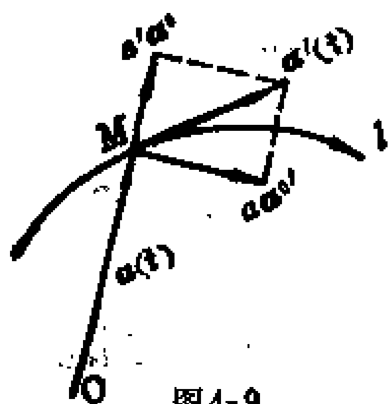


图4-9

例4·7 试求曲线$x=t$、$y=t^2$、$z=t^3$在坐标原点的单位切线矢量$\boldsymbol{\tau}$，及与$\boldsymbol{\tau}$垂直的一单位矢量。

解 $\boldsymbol{r}=\{t, t^2, t^3\}$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\{1, 2t, 3t^2\}$$

则该曲线上任一点处的单位切线矢量为

$$\boldsymbol{\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\{1,2t,3t^2\}$$

而$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$是与$\boldsymbol{\tau}(t)$垂直的一矢量，有

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\frac{-(4t+18t^3)}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)^3}}\{1,2t,3t^2\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\{0,2,6t\}$$

坐标原点对应于参数值$t=0$，以$t=0$代入上式，得出

$$\boldsymbol{\tau}(0)=\{1,0,0\}$$

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|_{t=0}=\{0,2,0\}$$

已知矢量$\{0,2,0\}$的模为2，以2除之，得

$$\frac{1}{2}\{0,2,0\}=\{0,1,0\}$$

因此，$\boldsymbol{\tau}(0)=\{1,0,0\}$就是所求的单位切线矢量，而$\frac{1}{2}$

$\{0,2,0\}=\{0,1,0\}$则是所求的与$\boldsymbol{\tau}(0)$垂直的一单位矢量。

二、导矢在力学上的简单应用

设一质点M在空间运动，它的位矢$\boldsymbol{r}$与时间t的函数关系为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

这个函数的矢端曲线l，就是质点M运动的轨迹（图 4-10）。设从 t

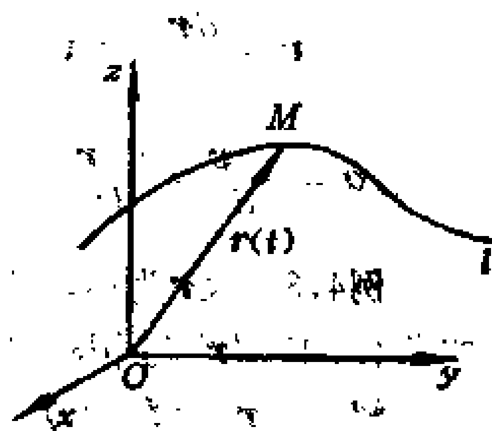


图4-10

$=0$到时刻t，M在l上所经过的路程为s，则有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \frac{ds}{dt} \tag{4-34}$$

我们知道，位矢函数的微分的模，等于其矢端曲线的弧长微分的绝对值，即

$$|d\boldsymbol{r}| = |ds|$$

从而有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\frac{|d\boldsymbol{r}|}{|ds|}=1$$

这表明，位矢函数对其矢端曲线弧长 s 的导数为一单位矢量。故由导矢的几何意义可知，式(4-34)中的$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是在点$M$ 处切线方向上的单位矢量，且指向s增加的一方，以$\boldsymbol{\tau}$ 表示；而式中的$\frac{ds}{dt}$是路程s对时间t的变化率，因之它表征质点M运动速度的大小，以v表示。于是有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=v\boldsymbol{\tau} \tag{4-35}$$

由此可见，导矢$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 表示了质点M运动速度的大小及方向，因而它就是M的速度矢量$\boldsymbol{v}$，即

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=v\boldsymbol{\tau} \tag{4-36}$$

显然，$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$是质点$M$的加速度矢量。

例4.8 设$\boldsymbol{r}$为运动质点相对于原点的位矢，s为质点所走的路程，求 $|d\boldsymbol{r}|$ 与 $|ds|$ 的关系。

解 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$d\boldsymbol{r}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

质点运动的轨迹一般为曲线l，取$t=0$时质点所在位置作为计算l的弧长的起点，则有

$$ds=\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

于是得

$$|d\boldsymbol{r}|=|ds|$$

由于$d\boldsymbol{r}$沿曲线l的切线方向，故l的单位切向矢量为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

而$\boldsymbol{\tau}$指向位矢$\boldsymbol{r}$的终点移动的一方，由此可见，质点运动的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=v\boldsymbol{\tau}$$

三、$\boldsymbol{r}'(s)$的几何意义

由以上的讨论可知，$\boldsymbol{r}'(s)=s(t)$ 表示空间一条曲线（参数t不一定代表时间），它的坐标分解式为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

现以弧坐标s代替它，则得到曲线以它自身的弧长作为参数的方程：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s) \tag{4-37}$$

或

$$x=x(s),y=y(s),z=z(s) \tag{4-37a}$$

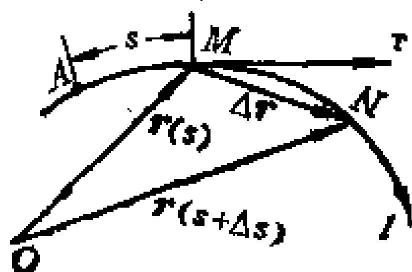


图4-11

为了用弧坐标s来确定曲线上一点M的位置，可先在弧上固定一点，例如A点（图4-11），它对应于参数$s=0$。可以这样来规定：当M位于A的一边时，认定s

为正；而当M在A的另一边时，则s为负。

对位矢函数$\boldsymbol{r}(s)$求导，得到一个新的矢量

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

它位于曲线在点M处的切线上，且指向s增加的一方，它的模等于

$$|\boldsymbol{\tau}|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta s}$$

其中$|\Delta\boldsymbol{r}|$就是割线$\overline{MN}$的长度，而Δs是弧$\widehat{MN}$的长。我们知道，弦长与其对应的弧长之比，当弧长趋于零时，其极限值为1，即

$$|\boldsymbol{\tau}|=1$$

定义$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\tau}$为曲线上的单位切线矢量，它指向曲线正向的那一方，即指向弧坐标s增加的一方。

下面再导出几个有用的公式。由

$$\boldsymbol{r}=\{x(s),y(s),z(s)\}$$

则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left\{\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right\}$$

另一方面，单位切线矢量$\boldsymbol{\tau}$又可写为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

其中α、β、γ是位矢$\boldsymbol{r}$分别与x、y、z轴正向间的夹角，由此有

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha;\quad\frac{dy}{ds}=\cos\beta;\quad\frac{dz}{ds}=\cos\gamma \qquad (4\text{-}38)$$

则

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{4-39}$$

又由

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\tau}$$

则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}=1$$

所以

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=1$$

即

$$(dr)^2=(ds)^2 \tag{4-40}$$

例4·9 设一质点沿曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$运动，其中$t$表示时间。求质点运动的速度及加速度。

解 按定义，点的速度矢量$\boldsymbol{v}$为其位矢$\boldsymbol{r}(t)$对时间的一阶导数，故有

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=v\boldsymbol{\tau}$$

其中$v=\dfrac{ds}{dt}$为$\boldsymbol{v}$在切线方向的投影，且当$v=\dfrac{ds}{dt}>0$时，速度$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{\tau}$的方向相同，即指向弧坐标s增加的一方；若$\dfrac{ds}{dt}<0$，则与$\boldsymbol{\tau}$的方向相反，即指向弧坐标s减小的一方。

至于点的加速度，则为其速度矢量对时间t的一阶导数。若以$\boldsymbol{a}$记加速度矢量，则有

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d(v\boldsymbol{\tau})}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

其中 为单位切向矢量。由前面的讨论可知，$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$与$\boldsymbol{\tau}$垂直，指向曲率圆的中心，其模为$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$，其中$\Delta\varphi$为矢量$\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$与$\boldsymbol{\tau}(s)$之间的夹角，而$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$称为曲线在所论点处的曲率，也就是曲率半径$\rho$的倒数，即

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

于是得

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

式中$\boldsymbol{n}$是与$\boldsymbol{\tau}$垂直的单位矢量，称为单位主法线矢量。因此，上式右边第一项是切向加速度，第二项是法向加速度。加速度$\boldsymbol{a}$的大小为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{v^4}{\rho^2}}$$

§4.5 几种具有特殊性质的矢性函数

一、模为定值的矢性函数

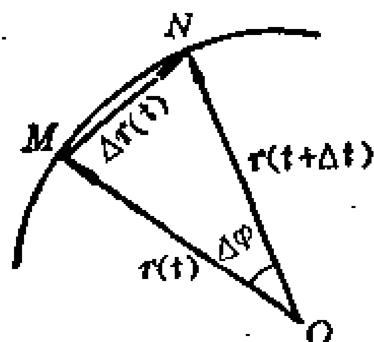


图4-12

设$\boldsymbol{r}(t)$是模为定值的矢性函数（图4-12），据上一节的分析可知其具有以下重要性质：

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=0 \qquad (4\text{-}41)$$

即矢性函数$\boldsymbol{r}(t)$的模为定值的充要

条件，是它的导数$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$与$\boldsymbol{r}(t)$的标积等于零，亦即对于模为定值的矢性函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$而言，其图象为某一球面上的曲线的充要条件，是它的每一点的切线和这点的位矢$\boldsymbol{r}(t)$垂直。

对于单位矢量$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{r}^0(t)$，显然有类似的结论。

二、具有固定方向的矢性函数

设$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$为具有固定方向的矢性函数，可写成

$$\boldsymbol{r}(t)=|\boldsymbol{r}(t)|\,\boldsymbol{r}^0(t)$$

由已给条件，$\boldsymbol{r}^0(t)$应是常矢量，则对上式求导后，得

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{d\,|\boldsymbol{r}(t)|}{dt}\boldsymbol{r}^0(t)$$

这表明，$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$与常矢量$\boldsymbol{r}^0(t)$平行，而$\boldsymbol{r}^0(t)$与$\boldsymbol{r}(t)$同向，因此$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$与$\boldsymbol{r}(t)$平行，故必有

$$\boldsymbol{r}(t)\times\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=0 \tag{4-42}$$

反之，若式(4-42)成立，我们不难验证，$\boldsymbol{r}(t)$必具有固定方向。

这个性质的几何意义是这样的：曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的图形是经过原点的一条直线的充要条件是它的每一点的切线与这点的位矢平行。

三、平行于定平面的矢性函数

设矢性函数$\boldsymbol{r}(t)$平行于某个定平面，取$\boldsymbol{n}$为该平面的法线单位矢量，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)=0$$

对上式连续求导两次，因$\boldsymbol{n}$为常矢量，可得

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=0$$

这表明，矢量$\boldsymbol{r}(t)$、$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$及$\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$都与$\boldsymbol{n}$垂直；因而它们是共面的，则其混合积为零，即

$$\left[\boldsymbol{r}(t),\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}\right]=0 \tag{4-43}$$

反之，若式(4-43)成立，可将矢量$\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$表为如下的线性组合：

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=\lambda\boldsymbol{r}(t)+\mu\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

其中$\lambda=\lambda(t)$和$\mu=\mu(t)$是变量t的数性函数。

另外，我们记

$$\boldsymbol{r}(t)\times\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\boldsymbol{n}(t)$$

显然，它是与矢量$\boldsymbol{r}(t)$、$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$垂直的矢性函数，则

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{n}(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}(t)\times\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right]\\&=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}+\boldsymbol{r}(t)\times\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}\\&=\boldsymbol{r}(t)\times\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{r}(t) \times \left[\lambda \boldsymbol{r}(t) + \mu \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right]$$

$$= \lambda \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}(t) + \mu \boldsymbol{r}(t) \times \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

$$= \mu \boldsymbol{r}(t) \times \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

$$= \mu \boldsymbol{n}(t)$$

因此$\frac{d\boldsymbol{n}(t)}{dt}$是与$\boldsymbol{n}(t)$平行的矢量，故有

$$\boldsymbol{n}(t) \times \frac{d\boldsymbol{n}(t)}{dt} = 0$$

据前面的讨论可知，$\boldsymbol{n}(t)$为具有固定方向的矢性函数。那么，作为与$\boldsymbol{n}(t)$垂直的矢性函数$\boldsymbol{r}(t)$，就必定平行于以$\boldsymbol{n}$为法线单位矢量的定平面。

从几何意义来说，上述性质给出了矢性函数$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$的图形是在经过原点的平面上的一条曲线的充要条件。

§4.6 矢性函数的积分

一、矢性函数的不定积分

定义 已给矢性函数 $\boldsymbol{a}(t)$，若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$的导函数$\boldsymbol{A}'(t)$，使

$$\boldsymbol{A}'(t) = \boldsymbol{a}(t)$$

成立，则称$\boldsymbol{A}(t)$为$\boldsymbol{a}(t)$的一个原函数。$\boldsymbol{a}(t)$的原函数的全体，记作

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt \qquad (4\text{-}44)$$

叫做$\boldsymbol{a}(t)$的不定积分。

与数性函数的不定积分一样，矢性函数的不定积分也是微商的逆运算。不难证明，如果$\boldsymbol{A}(t)$是$\boldsymbol{a}(t)$的一个原函数，那

么，$\boldsymbol{a}(t)$的其他任意原函数与$\boldsymbol{A}(t)$只相差一个常矢量$\boldsymbol{c}$，即

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{c} \tag{4-45}$$

若将$\boldsymbol{a}(t)$写成坐标表示式

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} + a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则有

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \left(\int a_x(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int a_y(t)\,dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int a_z(t)dt\right)\boldsymbol{k} \tag{4-46}$$

上式表明，求矢性函数的不定积分，归结为求三个数性函数的不定积分。

由于矢性函数和数性函数的不定积分有完全类似的定义，因此，有关数性函数不定积分的基本性质，对于矢性函数仍然适用。不难验证，下列运算法则成立，

$$\int c\boldsymbol{a}(t)dt = c\int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{4-47}$$

$$\int [\boldsymbol{a}(t) \pm \boldsymbol{b}(t)]dt = \int \boldsymbol{a}(t)\,dt \pm \int \boldsymbol{b}(t)dt \tag{4-48}$$

$$\int \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{k}\cdot\int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{4-49}$$

$$\int [\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}(t)]dt = \boldsymbol{k}\times\int \boldsymbol{a}(t)dt \tag{4-50}$$

其中$\boldsymbol{b}(t)$为矢性函数，c为常数，$\boldsymbol{k}$为常矢。

二、矢性函数的定积分

定义 设矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在区间$[T_1, T_2]$上连续，则$\boldsymbol{a}(t)$在该区间上的定积分是指下面形式的极限：

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta t_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}(\xi_i)\Delta t_i \tag{4-51}$$

其中$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T_2$，$\xi_i$是区间$[t_{i-1}, t_i]$上的一点，

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$。

容易看出，矢性函数定积分的概念，与数性函数相应的概念完全类似，因此，它也就具有数性函数定积分的那些基本性质。特别地，若$\boldsymbol{A}(t)$是连续矢性函数$\boldsymbol{a}(t)$在区间$[T_1, T_2]$上的一个原函数，则有

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{A}(t_2) - \boldsymbol{A}(t_1) \tag{4-52}$$

例如，物理学上熟知的牛顿第二定律可以写为

$$\boldsymbol{F}(t) = m\boldsymbol{a}(t) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

则

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(t)dt$$

将上式从t_1到t_2积分，得

$$m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)dt$$

上式右边的积分叫做力$\boldsymbol{F}$在时间$(t_2 - t_1)$内的冲量，而$m\boldsymbol{v}$是动量。该式表明，任一质点的动量在某一时间内的改变量，等于作用在该质点上的力在同一时间的冲量。

与式(4-46)类似，求矢性函数的定积分，也可归结为求三个数性函数的定积分：

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)dt = \left(\int_{T_1}^{T_2} a_x(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_{T_1}^{T_2} a_y(t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_{T_1}^{T_2} a_z(t)dt\right)\boldsymbol{k} \tag{4-53}$$

作为例子，下面利用矢性函数的定积分来表示空间曲线Γ，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$的弧长计算公式。

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

当t从α变到$\beta(\beta>\alpha)$时，点$M(x,y,z)$画出由A到B的曲线弧Γ。如果函数$x(t)$，$y(t)$及$z(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上具有连续导数$x'(t),y'(t),z'(t)$，那么，AB的弧长s就等于定积分

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \quad (4\text{-}54)$$

显然，曲线Γ的矢量参数方程是

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

而

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

于是式(4-54)可表示为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \quad (4\text{-}55)$$

例如，一空间圆柱螺旋线

$$\boldsymbol{r} = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k}$$

若取A点$(\theta=0)$为起点，则对应于区间$[0,\theta]$的这段曲线长为

$$s = \int_0^{\theta} \left|\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\theta} \sqrt{R^2 + b^2}\, d\theta = \sqrt{R^2 + b^2}\,\theta$$

其中

$$\left|\frac{d(\theta)}{d\theta}\right| = \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2} = \sqrt{R^2 + b^2}$$

若记$m = \sqrt{R^2 + b^2}$，则$\theta = \frac{s}{m}$。于是空间圆柱螺旋线方程，就可表示成以其弧长s为参数的形式：

$$\boldsymbol{r}(s) = R\cos\frac{s}{m}\boldsymbol{i} + R\sin\frac{s}{m}\boldsymbol{j} + \frac{bs}{m}\boldsymbol{k}$$

从而得到切向单位矢量：

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = -\frac{R}{m}\sin\frac{s}{m}\boldsymbol{i} + \frac{R}{m}\cos\frac{s}{m}\boldsymbol{j} + \frac{b}{m}\boldsymbol{k}$$

这是因为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right| = \sqrt{\left(-\frac{R}{m}\sin\frac{s}{m}\right)^2 + \left(\frac{R}{m}\cos\frac{s}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{m^2} + \frac{b^2}{m^2}} = 1$$

我们知道，单位矢量的坐标就是它的方向余弦，所以，螺旋线的切线与oz轴交成等角γ，这里$\cos\gamma = \frac{b}{m}$。

例4.10 已知一质点在任意时刻$t \geqslant 0$的加速度是

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 12\cos 2t\boldsymbol{i} - 8\sin 2t\boldsymbol{j} + 16t\boldsymbol{k},$$

若在$t = 0$时，其速度$\boldsymbol{v}$及位移$\boldsymbol{r}$都为零，试求任意时刻的$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{r}$。

解 将$\boldsymbol{a}$积分，有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\int 12\cos 2t dt + \boldsymbol{j}\int -8\sin 2t dt + \boldsymbol{k}\int 16t dt$$
$$= 6\sin 2t\boldsymbol{i} + 4\cos 2t\boldsymbol{j} + 8t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}_1$$

按已给条件，$t=0$时，$\boldsymbol{v}=0$。则得

$$0=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}_1,\text{故}\boldsymbol{c}_1=-4\boldsymbol{j}$$

于是

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=6\sin2t\boldsymbol{i}+(4\cos2t-4)\boldsymbol{j}+8t^2\boldsymbol{k}$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\int 6\sin2t dt+\boldsymbol{j}\int(4\cos2t-4)dt+\boldsymbol{k}\int 8t^2dt$$
$$=-3\cos2t\boldsymbol{i}+(2\sin2t-4t)\boldsymbol{j}+\frac{8}{3}t^3\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}_2$$

又当$t=0$时，$\boldsymbol{r}=0$。故有

$$0=-3\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}_2,\text{于是}\boldsymbol{C}_2=3\boldsymbol{i}$$

所以

$$\boldsymbol{r}=3(1-\cos2t)\boldsymbol{i}+2(\sin2t-4t)\boldsymbol{j}+\frac{8}{3}t^3\boldsymbol{k}。$$

例4.11 一质点P（质量为m）的运动方程为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=f(r)\boldsymbol{r}^0,$$

其中$\boldsymbol{r}$是从原点O到P点的位矢，$\boldsymbol{r}^0$是$\boldsymbol{r}$方向的单位矢量，$f(r)$是从O到P的距离的函数。

（1）求证$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{k}$。（$\boldsymbol{k}$为常矢）

（2）解释$f(r)<0$及$f(r)>0$时的物理意义。

（3）说明（1）的结果的几何意义。

解 （1）对等式$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=f(r)\boldsymbol{r}^0$两边施以“$\boldsymbol{r}\times$”的运算：

$$m\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=f(r)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}^0$$

由于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}^0$共线，故$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}^0=0$，因而

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0\text{和}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=0$$

积分得

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{k}\qquad(\boldsymbol{k}\text{为常矢})$$

（2）如果$f(r)<0$，则加速度$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$与$\boldsymbol{r}^0$的方向相反，可见力指向原点$O$，而质点受到$O$点的吸引；如果$f(r)>0$，则$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$与$\boldsymbol{r}^0$的方向相同，此时力从原点$O$向外，所以质点受到$O$点的斥力。这种指向$O$点或背离$O$点的力，叫做中心力或有心力。

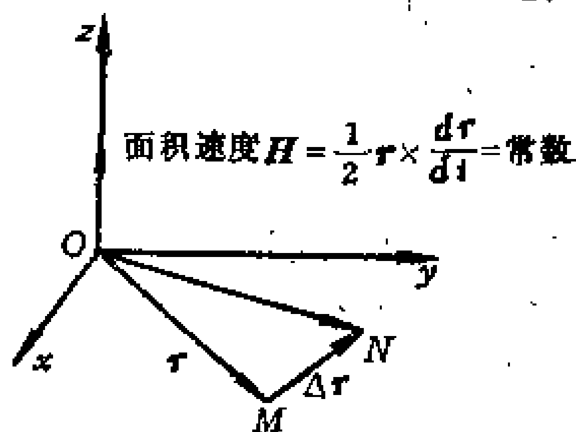


图4-13

（3）质点在Δt时间从M运动到N（图4-13）。在这段时间内，位矢扫过的面积近似等于以$\boldsymbol{r}$和$\Delta\boldsymbol{r}$为边的平行四边形的一半，亦即$\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{r}$，于是单位时间扫过的近似面积为$\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，则面积的瞬时变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

其中$\boldsymbol{v}$是质点的瞬时速度。而$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$叫做

面积速度。由(1)可知，面积速度$\boldsymbol{H}$为常数。因为$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}=0$，故运动发生在一个平面内(图4-13取为$xOy$平面)。

§4.7 多元矢性函数的微分和积分

在物理学和力学中，我们所研究的问题往往牵涉到多方面的因素。从数量上看，变量之间的对应关系不只依赖于一个自变量，而是依赖于几个自变量。例如，理想气体的体积V与热力学温度T成正比，而与压力p成反比，它们之间的关系可以写为

$$V=\frac{RT}{p}\qquad (R\text{为气体常数})$$

这就是一摩尔理想气体的状态方程。因此，有必要在一元矢性函数的基础上，进一步讨论多元矢性函数微分和积分概念。为了简便起见，这里只讨论以空间直角坐标为自变量的三元矢性函数$\boldsymbol{a}(x,y,z)$。

一、多元矢性函数的偏导数

我们知道，导数表征某个函数对于自变量的变化率。而多元矢性函数对于某个自变量的偏导数，则表示该自变量变化时(其他自变量看作常数)，矢性函数对该自变量的变化率。例如，设$\boldsymbol{a}$是一个依赖于三个数性变量的矢性函数，写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}(x,y,z)\\&=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}\end{aligned}\qquad(4\text{-}56)$$

$\boldsymbol{a}(x,y,z)$对于自变量x的偏导数，就定义为(假定极限存在)：

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta x}$$

同理，若下列极限存在，则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta y}$$

及

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta z}$$

它们分别是$\boldsymbol{a}(x,y,z)$对自变量y和z的偏导数。

将式(4-56)代入以上三式的右边，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}&=\frac{\partial a_x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}&=\frac{\partial a_x}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}&=\frac{\partial a_x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{4-57}$$

对于多元矢性函数来说，可微性这一术语是指其一阶偏导数连续。矢性函数的偏导数仍为矢性函数，我们能够象在普通微积分中那样定义二阶以及高阶偏导数。例如：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\right),\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right),\frac{\partial^3 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}\right)$$

如果$\boldsymbol{a}(x,y,z)$至少具有二阶连续偏导数，于是有$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}$，即求偏导数的次序可以交换。

例4.12 求以柱坐标为自变量的矢性函数$\boldsymbol{a}(\rho,\varphi,z)$的偏导数的表达式。

解 在柱坐标系中，有

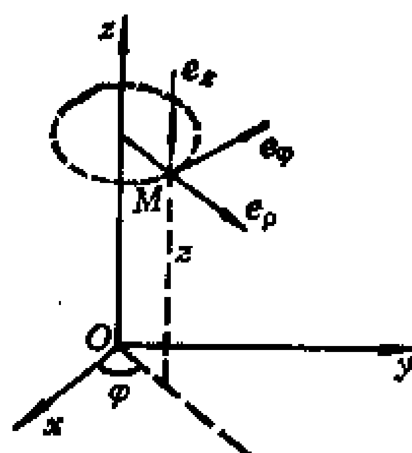


图4-14

$$\boldsymbol{a}(M)=a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+a_z\boldsymbol{e}_z$$

其中单位矢量$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$与直角坐标系中的$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不同，它们的方向可随M点的变动而改变(图4-14)。注意到

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}=0,\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi,\qquad\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\rho}=0,\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho,\quad\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial\rho}=0,\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial\varphi}=0,\qquad\frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial z}=0$$

所以得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+\alpha_\varphi\boldsymbol{e}_\rho+a_z\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+a_z\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}_\rho}{\partial\rho}-a_\varphi\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(a_\rho+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+a_z\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{a}_\rho}{\partial z}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial a_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z。$$

二、多元矢性函数的全微分

若矢性函数$\boldsymbol{a}(x,y,z)$在一点$M(x,y,z)$的某一邻域内有定义，并设$M'(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$为该邻域内的任意一点。则当自变量由点$M$过渡到点$M'$时，矢性函数有全增量

$$\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(M')-\boldsymbol{a}(M)=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}$$

其中$\Delta a_x,\Delta a_y,\Delta a_z$分别是$a_x,a_y,a_z$的全增量，它们的线性主部则由$da_x,da_y,da_z$表示。

定义矢性函数$\boldsymbol{a}(x,y,z)$的全微分为

$$d\boldsymbol{a}=da_x\boldsymbol{i}+da_y\boldsymbol{j}+da_z\boldsymbol{k} \tag{4-58}$$

且

$$da_x=\frac{\partial a_x}{\partial x}dx+\frac{\partial a_x}{\partial y}dy+\frac{\partial a_x}{\partial z}dz$$

$$da_y=\frac{\partial a_y}{\partial x}dx+\frac{\partial a_y}{\partial y}dy+\frac{\partial a_y}{\partial z}dz$$

$$da_z=\frac{\partial a_z}{\partial x}dx+\frac{\partial a_z}{\partial y}dy+\frac{\partial a_z}{\partial z}dz$$

将以上三式代入式(4-58)，并与式(4-57)比较后得

$$d\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}dx+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}dy+\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}dz \tag{4-59}$$

例4.13 已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$，$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$。

证明$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$。

证

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{a}&=da_x\boldsymbol{i}+da_y\boldsymbol{j}+da_z\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}dx+\frac{\partial a_x}{\partial y}dy+\frac{\partial a_x}{\partial z}dz\right)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}dx+\frac{\partial a_y}{\partial y}dy+\frac{\partial a_y}{\partial z}dz\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}dx+\frac{\partial a_z}{\partial y}dy+\frac{\partial a_z}{\partial z}dz\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)dz$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}dx+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}dy+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}dz$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\frac{dz}{dt}。$$

三、多元矢性函数的积分

1. 体内的积分

设V是空间有界区域，$\boldsymbol{a}$为定义在V上的矢性函数，将V分成许多体元，并将各体元的体积ΔV_i乘以体元内一点的矢性函数$\boldsymbol{a}_i$，作成和式。当体元无限变小时，所有这些乘积之和的极限，就定义为矢性函数$\boldsymbol{a}$在域V的积分，记作

$$\iiint_V \boldsymbol{a}dV=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta V_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\Delta V_i$$

将式(4-56)代入上式右边，得

$$\iiint_V \boldsymbol{a} dV = \left(\iiint_V a_x dV\right)\boldsymbol{i} + \left(\iiint_V a_y dV\right)\boldsymbol{j} + \left(\iiint_V a_z dV\right)\boldsymbol{k} \tag{4-60}$$

2. 曲面上的积分

类似地，我们定义矢性函数$\boldsymbol{a}$在光滑曲面S上的积分为

$$\iint_S \boldsymbol{a} dS = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \Delta S_i$$

且有

$$\iint_S \boldsymbol{a} dS = \left(\iint_S a_x dS\right)\boldsymbol{i} + \left(\iint_S a_y dS\right)\boldsymbol{j} + \left(\iint_S a_z dS\right)\boldsymbol{k} \tag{4-61}$$

3. 曲线上的积分

同样地，可定义矢性函数$\boldsymbol{a}$在光滑曲线l上的积分为

$$\int_l \boldsymbol{a} dl = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i \Delta l_i$$

且有

$$\int_l \boldsymbol{a} dl = \left(\int_l a_x dl\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_l a_y dl\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_l a_z dl\right)\boldsymbol{k} \tag{4-62}$$

此外，在高等数学中学过的面积分和线积分，也与矢性函数有关。它们分别定义为

$$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i$$

$$= \iint_S \left(a_x dS_x + a_y dS_y + a_z dS_z\right)$$

$$= \iint_S \left(a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma \right) dS$$

(4-63)

及

$$\int_l \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \cdot \Delta \boldsymbol{l}_i$$

$$= \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz \qquad (4\text{-}64)$$

其中$d\boldsymbol{S}$、$d\boldsymbol{l}$分别是曲面元素矢量及曲线元素矢量，而α,β,γ分别是$d\boldsymbol{S}$与x、y、z轴正向的夹角。

若将$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}$与$\iint_S \boldsymbol{a} dS$、以及$\int_l \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l}$与$\int_l \boldsymbol{a} dl$分别加以比较，就可看出它们之间的区别：前者是对无穷多个标量元求代数和，而后者是对无穷多个矢量元求矢量和。

例4.14 设力场 $\boldsymbol{F} = (2x - y + z)\boldsymbol{i} + (x + y - z^2)\boldsymbol{j} + (3x - 2y + 4z)\boldsymbol{k}$，一质点$P$绕$xOy$平面上中心在原点$O$、半径为3的圆周$c$运动一周，求力所作的功。

解 因为点P在平面$z = 0$上运动，故有

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$$

力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C [(2x-y)\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j} + (3x-2y)\boldsymbol{k}] \cdot (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j})$$

$$= \int_C (2x - y)dx + (x + y)dy$$

圆的参数方程为

$$x=3\cos\theta$$
$$y=3\sin\theta$$

其中θ从 0 到2π(图4-15)，则线积分等于

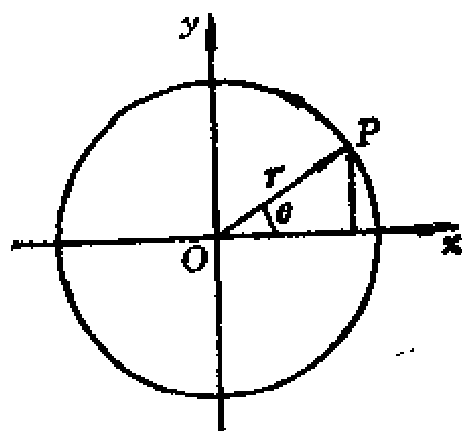


图4-15

$$\int_0^{2\pi}\Big[(2\times 3\cos\theta-3\sin\theta)\cdot(-3\sin\theta)d\theta+(3\cos\theta+3\sin\theta)\cdot(3\cos\theta)d\theta\Big]$$

$$=\int_0^{2\pi}9(1-\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=9(\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi}=18\pi$$

此即为$\boldsymbol{F}$对质点P所作的功。

习　题

1. 指出下列矢性函数的图形各是什么曲线？

（1）$\boldsymbol{r}(t)=(a+\cos\theta)\boldsymbol{i}+(b+\sin\theta)\boldsymbol{j}$，

（2）$\boldsymbol{r}(\varphi)=\cos\varphi\boldsymbol{i}+(2+\cos2\varphi)\boldsymbol{j}$，

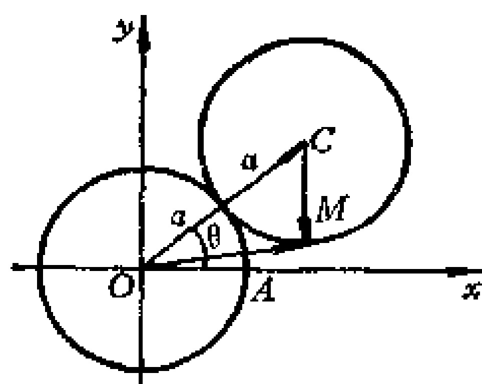
（3）$\boldsymbol{r}(\theta)=(a\cos\theta+x_0)\boldsymbol{i}+(b\sin\theta+y_0)\boldsymbol{j}$，

（4）$\boldsymbol{r}(t)=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})\boldsymbol{i}+\frac{b}{2}(e^t-e^{-t})\boldsymbol{j}$。

2. 求

（1）$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$，（2）$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$。

其中$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$都是t的可导函数。



第3题图

3．设有定圆O与动圆C，动圆在定圆外相切而滚动（如图）。求动圆上一定点M所描曲线的矢量方程。〔提示：（1）设开始时M点与A点重合；（2）取$\angle AOC=\theta$为参数；（3）$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$〕

4．已知$\boldsymbol{r}=\{t^3+2t,-3e^{-2t},2\sin 5t\}$，试求下列各式在$t=0$时的值：

（1）$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，（2）$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，（3）$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，（4）$\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$。

5．试求下列矢性函数的导数（参数为正值）：

（1）$\boldsymbol{r}(t)=\left\{\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\sqrt{1-\sqrt[3]{t}},b\right\}$，

（2）$\boldsymbol{r}(\theta)=\{a,\sin^2\theta,\cos^2\theta\}$，

（3）$\boldsymbol{r}(\lambda)=\{e^{2\lambda}\cos^2\lambda,0,e^{2\lambda}\sin^2\lambda\}$，

（4）$\boldsymbol{r}(t)=\left\{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{\pi}{2}\right\}$。

6．一质点沿参数方程为$x=e^{-t}$，$y=2\cos 3t$，$z=2\sin 3t$的曲线运动，其中t为时间。

（1）确定它在任何时刻的速度和加速度；

（2）求$t=0$时速度和加速度的大小。

7．设$\boldsymbol{a}=\{x^2\sin y,z^2\cos y,xy^2\}$，求$d\boldsymbol{a}$。

8．试求曲线$\boldsymbol{r}=\{at,bt^2,ct^3\}$上某一点的切线和法平面，这里$a,b,c$都是常数。

9．设$\boldsymbol{a}=5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j}$，求

（1）$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，　　（2）$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，

（3）$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$。

10．对下列曲线写出已知点的切线和法平面方程：

（1）$\boldsymbol{r}(t)=\{t,6t^2,12t^2\}$，在点$t=\frac{1}{2}$；

（2）$\boldsymbol{r}(\theta)=\{a\cos^2\theta,b\sin\theta\cos\theta,c\cos^2\theta\}$，在点$\theta=\frac{\pi}{4}$；

（3）$\boldsymbol{r}(\varphi)=\{\operatorname{tg}\varphi,\operatorname{tg}\varphi,\sec^2\varphi-1\}$，在点$\varphi=\frac{\pi}{4}$。

11．求曲线$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$上的点，使该点的切线平行于平面$x+2y+z=4$。

12．证明圆柱螺旋线$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}$的切线与$z$轴之间成定角。

13．一质点运动的位矢为$\boldsymbol{r}=\cos\omega t\boldsymbol{i}+\sin\omega t\boldsymbol{j}$，其中$\omega$为常数，证明：

（1）质点的速度$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{r}$垂直；

（2）加速度$\boldsymbol{a}$指向原点，且其大小和原点到质点的距离成正比；

（3）$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=$常矢量。

14．试证明位矢函数$\boldsymbol{r}(t)$的长度为一固定数的充要条件是$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$。

15．设$\boldsymbol{r}$是质量为m的质点相对于点O的位矢，$\boldsymbol{F}$是作用于质点的外力，于的 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}$ 是$\boldsymbol{F}$对于点O的转矩。证明$\boldsymbol{M}=\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}$，其中$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，且$\boldsymbol{v}$是质点的速度。

16．如果$\boldsymbol{a}=(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+(e^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}+(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$，求

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y \partial x}。$$

17. 设$\boldsymbol{r} = -a\sin\theta \boldsymbol{i} + a\cos\theta \boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$求

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')d\theta$$

18. 在力场$\boldsymbol{F} = 3xy\boldsymbol{i} - 5z\boldsymbol{j} + 10x\boldsymbol{k}$中，一质点由$t = 1$到$t = 2$沿曲线$x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$运动，求所作的功。

19. 一质点以速度$\boldsymbol{v}$沿空间曲线运动，证明它的加速度$\boldsymbol{a}$为

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{\tau}$是空间曲线的单位切线矢量，$\boldsymbol{n}$是单位主法线矢量，ρ的曲率半径。

第五章　场、梯度、散度及旋度

在许多科学技术问题中，为了研究某个物理现象，常常需要考察各种物理量（例如，力、电、位、温度、速度、密度等）在空间的分布情况和变化规律，为此，有必要引进场的概念。在场这个概念的基础上，本章所讨论的内容包括三个部分，数量场的梯度、矢量场的散度及矢量场的旋度。这些内容是学习气体动力学、电工理论、无线电以及其他许多专业课程的基础。

§5.1　场

一、场的概念

一物理量随着它在空间（或空间的某一部分）的分布情况的不同，所产生的物理现象也就不会相同。因此，要了解某一物理现象，就必须掌握发生该物理现象的各物理量的分布情况，以及它们随时间的变化规律。譬如，为了预报一个地区在某一段时间内的气候，就要知道其附近各地区的气压、气温等的分布情况以及它们随时间变化的规律。同样，要了解电场的变化，就须知道其电位、电场强度等物理量的分布及变化规律。

定义　如果在空间（或空间的某一部分）中的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，则称此空间为该物理量的一个场。如果所确定的这个物理量是数量，就称这个场为数量场；如果是矢量，则称为矢量场。

例如，温度场、密度场及电位场是数量场；而力场、速度场则是矢量场。

此外，需要指出的是，若描述场的某个物理量，在场的各点处的对应值不随时间变化，则称该场为稳定场，否则，就是非稳定场。一般说来，现实中的场多是非稳定的，但在一些实际问题中，如果在较短的时间内，在场中同一点处的物理量变化很小，那么为了简化起见，就可以将它近似看作稳定场。以后我们只讨论稳定场，不过，所得的结果也适用于非稳定场的每一瞬间情况。

场这个概念来源于物理学，它是矢量分析的基础。在数学概念上，场是从量的方面去描述自然现象的某些共同特性的，是客观世界的一定数量关系和空间形式的一种表示方式。

根据场的定义不难明白，场是用空间的点函数来表征的。通常说给定一个场，就是指给出该空间的点函数；反之，如果给出空间中某一个点函数，也就是给定了一个场。因之，数学上总是用空间的点函数来表示场。于是，所谓给定了一数量场，就相当于给定了空间点的一个数性函数$u(M)$；而给定一矢量场，就相当于给定了空间点的一个矢性函数$\boldsymbol{a}(M)$，其中M表示空间域中的点。

在直角坐标系中，由于空间的点M由它的三个坐标x,y,z所确定，因此，一个数量场可以用空间点的数性函数

$$u(M)=u(x,y,z) \tag{5-1}$$

来表示。同样，一个矢量场可以用空间点的矢性函数

$$\boldsymbol{a}(M)=\boldsymbol{a}(x,y,z) \tag{5-2}$$

来描述。即

$$\boldsymbol{a}(M)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{5-2a}$$

记作$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，其中$x$、$y$、$z$是点$M$的坐标，而

$$a_x=a_x(x,y,z),a_y=a_y(x,y,z),a_z=a_z(x,y,z)$$

是矢量$\boldsymbol{a}$的三个坐标分量，它们是点的数性函数。由此可见，一个矢量场$\boldsymbol{a}$，是由三个数量场a_x、a_y，a_z来确定的。

场有两个重要的辅助概念，即数量场的等值面和矢量场的矢量线，它们有助于人们形象地了解场及其性质。

二、数量场的等值面

由数量场的定义可知，分布在场中各点处的数量u，乃是场中之点M的单值函数$u=u(M)=u(x,y,z)$。今后，恒假定这函数具有一阶连续偏导数。在数量场$u=u(x,y,z)$中，为了直观地研究物理量u在场中的分布情况，就需要考察场中那些有相同数值的点，也就是满足方程

$$u(x,y,z)=C \tag{5-3}$$

的点(式中C是常数)，这些点在几何上构成一个曲面，这样的曲面称为数量场的等值面。因此式(5-3)就是等值面方程。例如，温度场中的等值面，就是由温度相同的各点所组成的等温面；又如，设在坐标原点置有一电量为q的电荷，于是它在空间形成一个电位场(数量场)。这个场由数性函数$u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$所确定，其中$r$是空间中的点到电荷的距离，$\varepsilon$为介电常数。不难看出，这电位场的等值面，就是由电位相同的各点所构成的等位面，它由方程

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}=C\quad(C\text{是不等于零的常数})$$

即

$$r=\frac{q}{4\pi\varepsilon C}$$

来决定。这乃是以原点(电荷)为中心的球面。

在式(5-3)中，若取

$$C=C_1,C_2,C_3,\cdots,C_n$$

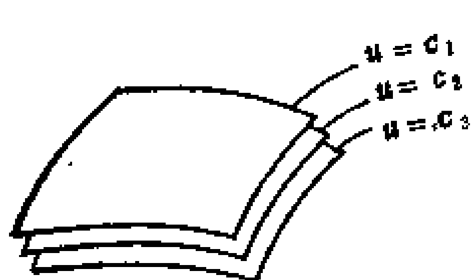


图5-1

等一系列不同的常数值，就得到一系列不同的等值面(图5-1)。这族等值面充满了整个数量场所在的空间，而且互不相交。因此，我们可以用一族等值面，来描绘数量场的几何特征。由于数量场中每一点都对应一个u值，故通过场中每一点只能有一个等值面。例如，通过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的等值面为

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$$

同样地，在函数$v=v(x,y)$所表示的平面数量场中，具有相同常数值C的点，就组成这个数量场的等值线

$$v(x,y)=C \qquad (5\text{-}4)$$

例如，地形图上的等高线，地面气象图上的等压线、等温线等，它们都是平面数量场中的等值线。

数量场$u(x,y,z)$可以看作是由一层一层的等值面裹起来的。场的等值面或等值线，可以帮助我们更直观地了解某个物理量的分布情况。事实上，等值面(或等值线)的疏密程度，就表征该数量场的分布状态。显然，等值面密集之处，数量场的空间变化就快；反之，等值面稀疏之处，场的空间变化就慢(等值线对于平面场的情况也是这样)。因此，从理论上讲，只要作出数量场的一族等值面(或等值线)，那么该场的分布状况也就一目了然。比如，在地形图上，每隔一定高度，画出相应的等高线，它们的疏密程度各处是不一样的。这样，不仅能根据地形图上等高线及其所标出的高度，以了解该地区地势的高低情况；而且还可根据等高线在各处的疏密程度，来判定该地区

看各个方向上坡度的大小，等高线稀的地方，说明地面的坡度小；反之，密的地方，坡度就大。

例5.1 设$u(x,y,z)=x+y+z-1$，则在空间中的每一点，都对应于$u(x,y,z)$一个确定的数值。例如，$u(0,0,0)=-1$，$u(0,0,\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，$u(0,1,1)=1$，$u(2,3,5)=9$等，所以$u(x,y,z)$表征的空间是一个数量场。而

$$u(x,y,z)=C$$

就是它的等值面。于是有

$$x+y+z-1=C$$

即

$$x+y+z-(1+C)=0$$

这是平面方程。由于C可以取各种不同的常数值，故u的等值面是一族互相平行的平面(图5-2)。

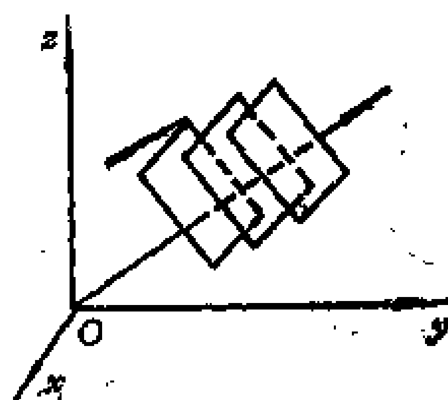


图5-2

三、矢量场的矢量线

在前面，我们引进了等值面来形象地描绘数量场。对于矢量场，为了直观地表示矢量的分布状况，现引入矢量线的概念。所谓矢量线，乃是这样的曲线，在它上面每一点处的切线方向，都与场的矢量在该点的方向一致(图5-3)。此外，矢量线的稠密度表示了矢量场中各点矢量的数值大小。例如，矢量场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

确定了空间点电荷电场的强度，其中q是电荷的电量，$\boldsymbol{r}$是电荷到


图5-3

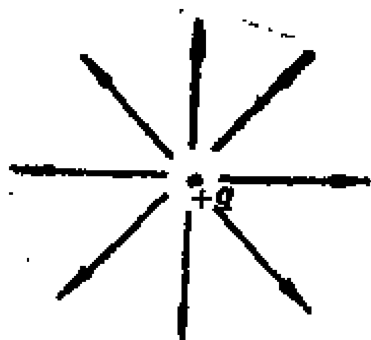


图5-4

场中一点的位矢。因此对于正电荷，矢量线是由电荷出发的射线(图5-4)，而矢量线的方向就是该点电场的方向；且靠近点电荷q处矢量线稠密，这说明越靠近q处电场越强。电场中的这种矢量线称为电力线(或电场线)；磁场中的矢量线称为磁力线；而在流体的速度场中，矢量线就是流体的流线。

对于已知的矢量场$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$，我们来导出它的矢量线方程。为此，设$M(x,y,z)$是矢量线上任一点，则该点的位矢为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

取微分，有

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$$

由于矢量$d\boldsymbol{r}$在点M处与矢量线相切，按矢量线的定义，它必定在M点处与场的矢量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

共线，因而其对应分量必成比例，于是得

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z} \tag{5-5}$$

这是一个对称型线性方程，称为矢量线的微分方程。在式(5-5)中，若其中有一分母为零，可理解为相应的分子亦为零。从上式中适当选取两个方程，分别求得它们的通解为

$$\begin{cases}u_1(x,y,z,c_1)=0\\u_2(x,y,z,c_2)=0\end{cases} \tag{5-6}$$

这就是所求的矢量线方程，其中c_1，c_2为任意常数。式(5-6)是矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的空间矢量线族，若给定场中一点M的初始条

件，就可求出过M点的一条矢量线。不难证明，过矢量场中每一点都只有一条矢量线通过，即矢量线彼此不会相交，且矢量线族充满了整个矢量场所在的空间。

在所考察的空间中，若任取一曲线(不是矢量线) l，过l上的每一点引一矢量线，则这些矢量线形成一曲面，称为矢线面。它具有这样的特征：在其上所有点处，矢量$\boldsymbol{a}$在该面的法线上的投影为零。当l是条闭曲线时，就得到一管形的矢线面，称为矢线管(图5-5)。



图5-5

例5.2 设

$$\boldsymbol{a}=\left\{\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{-3x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ 0\right\},$$

求矢量线方程。

解 在空间中除(0,0,0)外，每一点都对应一个矢量$\boldsymbol{a}$。例如，$\boldsymbol{a}(1,1,1)=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right\}$，$\boldsymbol{a}(1,2,1)=\left\{\frac{6}{\sqrt{6}},\ \frac{-3}{\sqrt{6}},0\right\}$等，因而以$\boldsymbol{a}$表征的空间部分(原点为奇点，应除外)为一矢量场。据式(5-5)，矢量线的微分方程为

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0}$$

从$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$解得

$$x^2+y^2=C_1$$

又由$dz=0$，得

$$z = C_2$$

于是得矢量线方程

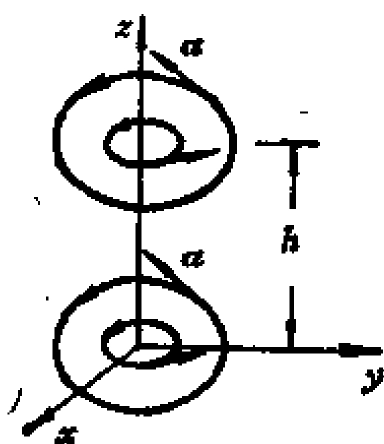


图5-6

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$$

这是一族中心在z轴上、且平行于xOy坐标平面的圆（图5-6）。图中为$z = 0$及$z = h$两平面上的矢量线。

例5.3 一质量为M的质点，试求它产生的引力场$\boldsymbol{F}$的力线（即矢量线）。

解 设该质点位于直角坐标系的原点，则根据牛顿定律，它对位于$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$处单位质量质点$m'$的引力$\boldsymbol{F}$为

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm'}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中f为牛顿引力常数，因$m' = 1$，并设$fM = m$，则

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$$

于是力线的微分方程为

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

即

$$\frac{dx}{dz} = \frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_y}{F_z} \tag{*}$$

这里又由于

$$F_x = -m\frac{x}{r^3}, F_y = -m\frac{y}{r^3},$$

$$F_z = -m\frac{z}{r^3}$$

将此式代入式(*)中，得到

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z}$$

积分，得力线方程组

$$\begin{cases} x = C_1 z \\ y = C_2 z \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{为任意常数})$$

由此可见，对这个引力场$\boldsymbol{F}$而言，其力线是由无穷远处发出而止于坐标原点(即通过该质点本身)的一族射线(图5-7)。

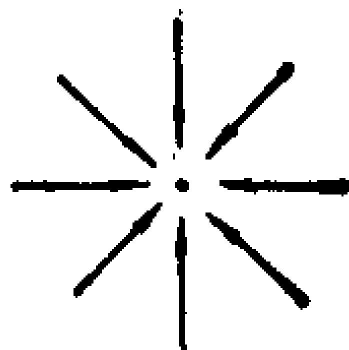


图5-7

例5.4 设点电荷 q 位于坐标原点，则由电学可知，它在周围空间的任一点$M(x,y,z)$处所产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

电位为

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

其中 ε 是介电常数，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$为$M$点的位矢，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$。试求(1)电场强度场$\boldsymbol{E}$的电力线(矢量线)方程；(2)电位场$V$的等电位面方程。

解 我们知道，电荷周围存在一种特殊物质，它所占的空

间部分称为电场。在电场中，每一点都有一个电场强度$\boldsymbol{E}$，同时也有一个电位V，前者为矢量，后者是标量。$\boldsymbol{E}$和V是表征电场性质的两个最重要的参量，当电场用$\boldsymbol{E}$表征时，是一个矢量场，称为电场强度场；而当电场用V表征时，则是一个数量场，称为电位场。所以，电场既是一个矢量场，又是一个数量场。

（1）由$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\ \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，有

$$E_x=\frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3},E_y=\frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3},E_z=\frac{qz}{4\pi\varepsilon r^3}$$

则$\boldsymbol{E}$的矢量线的微分方程为

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$$

即

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}\\[2mm]\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}\end{cases}$$

解之，得

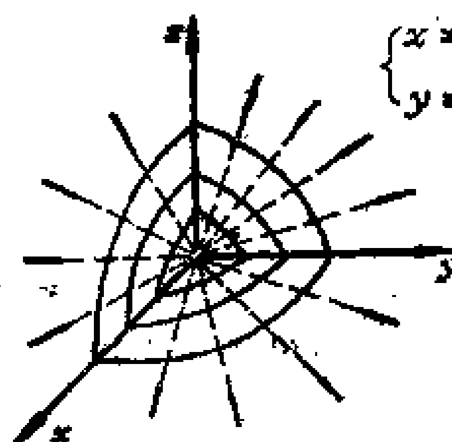


图5-8

$$\begin{cases}x=C_1y\\y=C_2z\end{cases}\quad(C_1,C_2\text{为任意常数})$$

这就是电场强度$\boldsymbol{E}$的矢量线方程。其图形是一族从坐标原点出发的射线(图5-8中的虚线)，在电学中称为电力线。

（2）电位场V的等值面，称为等电位面，其方程为$V(x,y,z)$

$=C$。显然，等电位面上每一点的电位都相同。

由$V=\frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon r}$，则电位场$V$的等电位面方程为

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C$$

化简后得

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2 (\text{常数}C\neq0)$$

不难看出，这是以原点(0，0，0)为心、$\frac{q}{4\pi\varepsilon C}$为半径的一族同心球面(图5-8中的实线)。

例5.5 电流I流过"无限长"的直导线，在导线周围产生磁场，而在磁场中的每一点，都有一个磁感应强度$\boldsymbol{B}$，全体$\boldsymbol{B}$形成一个矢量场，它的矢量线称为磁力线。求磁力线方程。

解 电流或运动电荷的周围，存在一种特殊的物质，它所占的空间部分称为磁场。而用来表征磁场性质的最重要的参量，就是磁感应强度$\boldsymbol{B}$，它描述场中每一点的强弱与方向。磁场也常用磁场强度$\boldsymbol{H}$来表示，且$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，其中$\mu$是磁导率。

在任何磁场中，磁感应强度$\boldsymbol{B}$(或磁场强度$\boldsymbol{H}$)的矢量线，每一条都是环绕电流的闭合曲线。它的回转方向和它所环绕的电流方向按"右手定则"来确定。

现考察"无限长"直电流产生的静磁场，且取导线为z轴，则

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$$

其中r为场中任一点到导线的距离。由于

$$\begin{cases} Bx = \dfrac{-\mu I y}{2\pi r^2} \\ By = \dfrac{\mu I x}{2\pi r^2} \\ Bz = 0 \end{cases}$$

则$\boldsymbol{B}$的矢量线的微分方程为

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

解之，得

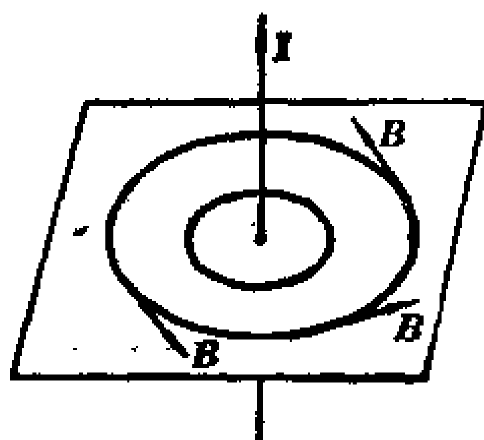


图5-9

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1{}^2 \\ z = C_2 \end{cases}$$

这就是所求的磁力线方程。容易看出，这是中心在z轴上、且平行于xOy平面的一族圆（图5-9）。显然，在同一圆周上，$\boldsymbol{B}$的大小相等，其方向则沿圆的切线方向。

习　　题

1. 指出下列数量场的分布区域，并求出其等值面。

（1）　$u = x + y$，

（2）　$u = \dfrac{1}{ax + by + cz + d}$，

（3）　$u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. 求矢量场$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$的矢量线方程。

3. 求矢量场$\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$的矢量线方

程。

4．求矢量场$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$过点$M(1,2,3)$的矢量线方程。

5．求流体速度场$\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}+2y^2\boldsymbol{k}$的流线方程。

§5.2 数量场的梯度

一、方向导数

前已述及，在数量场中，我们可以借助于等值面（线），来形象地描述数量$u=u(M)$的分布情况，但这只是对数量场的一种整体性的了解。为了更深入了解场的性质，有必要研究数量场的另一重要方面，也就是数量u在场中各个点处的邻域内、沿每一方向的变化情况，这样对场就作到了局部性的了解。例如，在考察温度场时，若要了解场中热的分布及转移的规律，就得知道温度沿着任一方向变化的快慢，也就是需要讨论数量场沿着任一方向的变化率问题。为此，这里引入方向导数的概念。

1．方向导数的定义

设给定数量场$u=u(M)$，在场中取定一点M_0，过M_0引任一方向$\boldsymbol{l}$（图5-10），M是$\boldsymbol{l}$上与点M_0邻近的一动点，而Δl为M_0与M的距离（$\Delta l=\overline{M_0M}$）。当动点M沿l无限趋近于M_0时，若比式

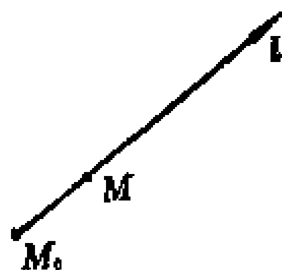


图5-10

$$\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}$$

的极限存在，则称它为函数$u(M)$在点M_0处沿l方向的方向导

数，记作$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l} \tag{5-7}$$

这个导数描述了函数$u(M)$在点M_0附近沿着方向l的变化情况。由于已假定极限存在，则由极限性质可知，当极限为正时，则在该方向l上点M_0的近旁，不等式$\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}>0$成立。这时，若$\Delta l>0$（即$M_0$到$M$的方向与$l$的正向一致），则有$u(M)>u(M_0)$，这说明函数$u(M)$在点$M_0$的近旁沿着$l$正向的变化是增加的；反之，若$\Delta l<0$，则有$u(M)<u(M_0)$，表明函数在点$M_0$的近旁沿着$l$负向的变化是减少的。总之，当$\frac{\partial u}{\partial l}>0$时，函数$u(M)$沿$l$正向就是增加的；同理，当$\frac{\partial u}{\partial l}<0$时，则函数沿$l$正向就是减少的。由此可见，方向导数乃是函数$u(M)$在一个点处沿某一方向对距离的变化率。

2. 方向导数的计算公式

以上定义了函数$u(M)$的方向导数，那么我们要问，在什么条件下，式(5-7)当$M\to M_0$时的极限一定存在呢？对此我们有下面的定理。

定理1 若函数$u(M)=u(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微，则它在点M_0处沿l方向的方向导数必存在，且由如下的公式给出

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{5-8}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$是函数$u(M)$在点$M_0$处的偏导数，$\cos\alpha$，

$\cos\beta, \cos\gamma$为$\boldsymbol{l}$方向上的方向余弦。

证 如图(5-10)所示，在$\boldsymbol{l}$方向上点M_0的近旁取一动点$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$。因为函数$u$在点$M_0$处可微，故有

$$\Delta u = u(M) - u(M_0)$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon\cdot\Delta l$$

其中Δl表示M_0与M两点间的距离，而ε则随着$M\to M_0$而趋于零。将上式两端除以Δl，得

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \varepsilon$$

即

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon$$

令$\Delta l\to 0$取极限，注意到此时有$\varepsilon\to 0$，就得到公式(5-8)。

由此可见，求数量场的方向导数，通常就化为求偏导数及给定方向的方向余弦的计算。方向导数是偏导数概念的推广，显然，当l取平行于坐标轴的方向时，那么方向导数就是偏导数。

例5.6 求函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$M_0(1,0,1)$处沿$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$方向的方向导数。

解 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点$M_0(1,0,1)$处，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

而l的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}$$

则由公式(5.8)，得

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例5.7 设函数$u(M)=3x^2+z^2-2yz+2zx$。求$u(M)$在点$M_0(1,2,3)$处沿着矢量$\{yz,zx,xy\}$的方向导数。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=6x+2z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2z$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z-2y+2x$$

在点$M_0(1,2,3)$处，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6+6=12,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=6-4+2=4$$

而

$$\{yz,zx,xy\}|_{M_0}=\{6,3,2\}$$

则方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{6}{7},\ \cos\beta=\frac{3}{7},\ \cos\gamma=\frac{2}{7}$$

所以得

$$\frac{\partial u}{\partial l}=12\cdot\frac{6}{7}-6\cdot\frac{3}{7}+4\cdot\frac{2}{7}=\frac{62}{7}$$

例5.8 求电位场

$$V(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

在场中任一点(原点除外)$M(x,y,z)$，沿等电位面的外法线方向的变化率。

解 等电位面是球心在原点的球面，故它的外法线矢量n的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$$

又因为

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3},\ \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{qz}{4\pi\varepsilon r^3}$$

所以得

$$\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{x^2}{r^4}+\frac{y^2}{r^4}+\frac{z^2}{r^4}\right)$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

从以上的讨论可知，公式(5-8)的意义就在于：沿任何方向的导数，都归结为多元函数偏导数的计算。

下面，我们设C为一光滑曲线，在C上取定一点M_1，作为计算弧长S的起点，并将弧长S增大的方向规定为C的正向。在这样的规定下，就有如下的定理。

定理2 设$u=u(x,y,z)$是在包含曲线C的空间域上分布的数量场，M_0为C上的一点，在M_0处沿C的正向作一与C相切的射线l(图5-11)。若函数$u(x,y,z)$在M_0处有连续的一阶偏导数，则在M_0处，公式

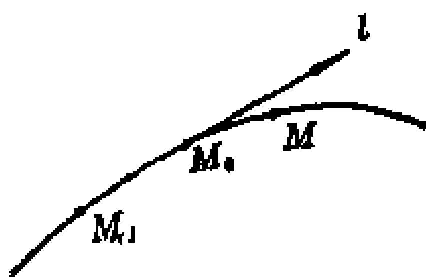


图5-11

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dS} \qquad (5\text{-}9)$$

成立。即$u(x,y,z)$在点M_0处对弧长的微商，等于$u(x,y,z)$在该点处沿切线正向的方向导数。

证 设M是曲线C上点M_0近旁的一动点($M\neq M_0$)，记作$\overline{M_0M}=\rho$。因为函数u可微，故有

$$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta S}+\varepsilon\frac{\rho}{\Delta S}$$

式中，当$M\to M_0$时，有$\varepsilon\to 0$，$\frac{\rho}{\Delta S}\to 1$。

依此，令$M\to M_0$，对上式取极限，则得

$$\frac{du}{dS}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dS}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dS}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dS}$$

容易看出，$\frac{dx}{dS}$，$\frac{dy}{dS}$，$\frac{dz}{dS}$就是曲线C的正向切线l的方向余弦，即

$$\frac{dx}{dS}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dS}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{dS}=\cos\gamma$$

则

$$\frac{du}{dS}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (5\text{-}10)$$

与式(5-8)比较，有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{du}{dS}$$

因此，也将函数u在点M_0处对弧长S的导数

$$\frac{du}{dS}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$$

称为u在M_0处沿曲线C(正向)的方向导数。

值得指出的是，式(5-10)中三个偏导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ 与曲线C的形状无关，而 α,β,γ 仅与过点M_0处的曲线C的方向有关。对于过M_0点的一切曲线，只要它们在点M_0与C具有相同的切线，那么，在点M_0处沿着所有这些曲线的导数，就都与在该点沿着曲线C的导数相同，且都等于函数在点M_0处沿着曲线在该点的切线方向的导数。

在平面场的情况下，设函数$u=u(x,y)$，则方向导数可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta \qquad (5\text{-}11)$$

例5.9 设数量场$u(x,y,z)=x^2-y^2+z$。求$u(x,y,z)$在点(1,-1,0)处沿方向$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$的方向导数。

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\frac{\partial u}{\partial z}=1$，在点(1,-1,0)处，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=1$$

而$\boldsymbol{l}$的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是得

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

二、梯度

方向导数解决了函数$u(M)$在给定点处沿某个方向的变化率问题。然而，对于场中每一个给定点，都可引出无穷多个方向；而且，沿其中任一方向，一般都有一个方向变化率，那么，函数在给定点处的方向导数就有任意多个；因此，这并不足以表述场中每一点的变化特性。我们所关心的问题是：数量场$u(M)$在给定点处的各个方向的变化率中，沿其中哪个方向的变化率为最大？最大的变化率又是多少？为了解决这个问题，在这里引入梯度的概念。

1．梯度的定义

我们来分析方向导数的公式(5-8)：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$及$\cos\gamma$是$\boldsymbol{l}$的方向余弦，也就是这个方向上的单位矢量

$$\boldsymbol{l}^0 = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

的坐标分量。至于该式右端其余的三个数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial u}{\partial z}$，也可看作一个矢量$\boldsymbol{G}$的坐标分量，即取

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{5-12}$$

这样，G在给定点处就是一固定矢量。于是利用矢量的标积定义及其运算，就可将方向导数表示为两矢量的标积：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})$$

$$=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}^0$$

$$=|\boldsymbol{G}|\cos\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle \tag{5-13}$$

其中第一个矢量G只与函数$u(M)$在给定点处的三个偏导数有关，而与$\boldsymbol{l}$的方向无关；第二个矢量$\boldsymbol{l}^0$是在给定点处的单位切向矢量，只与$\boldsymbol{l}$的方向有关，而与函数$u(M)$无关。上式表明，G在$\boldsymbol{l}$方向上的投影，正好等于函数$u(M)$在该方向上的方向导数。由此不难看出：

1）当$\boldsymbol{l}$与G重合且同向，即其夹角$\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle$为零时，有$\cos\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle=1$，此时方向导数取得最大值

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\boldsymbol{G}|$$

也就是说函数$u(M)$沿着矢量G的方向，增加得最快；当$\boldsymbol{l}$与G反向，即其夹角$\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle$为$\pi$，有$\cos\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle=-1$，此时方向导数取得最小值

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-|\boldsymbol{G}|$$

也就是$u(M)$沿着G的反方向减少得最快。

2）当$\boldsymbol{l}$与G正交，夹角$\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle$为$\frac{\pi}{2}$时，有$\cos\langle\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}^0\rangle=0$，于是$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，这说明$u(M)$在这个方向保持不变。

3）当$\boldsymbol{l}$与G既不重合，又不正交时，$\frac{\partial u}{\partial l}$取不为零的值，而

其绝对值小于$|\boldsymbol{G}|$。

由此可见，矢量$\boldsymbol{G}$的方向就是函数$u(M)$变化率最大的方向，它的模也就是这个最大变化率的数值。我们把$\boldsymbol{G}$叫做函数$u(M)$在给定点处的梯度。

定义 数量场$u(M)$在点M处的梯度是过该点的一个矢量$\boldsymbol{G}$，沿着这个矢量的方向，函数$u(M)$增加得最快，而它的模就是$u(M)$在这个方向的方向导数。简言之，一个指向$u(M)$增加得最快的方向、且大小等于在此方向的导数的矢量$\boldsymbol{G}$，称为$u(M)$的梯度，记作$\mathrm{grad}u(M)$，即

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{grad}u(M)$$

梯度的这个定义与坐标系的选择无关，它是由数量场中数量$u(M)$的分布所决定的。利用方向导数的公式，可以写出梯度在直角坐标系中的表示式

$$\mathrm{grad}u(M)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (5\text{-}14)$$

2．梯度的性质

1）梯度$\mathrm{grad}u(M)$在任意方向的投影，等于$u(M)$在这个方向的方向导数（图5-12）。即有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}_l u(M)$$

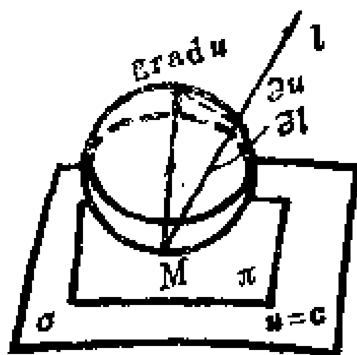


图5-12

事实上，前面已由方向导数公式得到了式(5-13)，其中$\boldsymbol{G}$的方向就是取得最大值的方向，而按梯度的定义，有$\mathrm{grad}u(M)=\boldsymbol{G}$。因此

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}^0=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}^0$$

$$=\mathrm{grad}_l u \qquad (5\text{-}15)$$

由此可见，只要求出$u(M)$在三个正交方向的变化率，就完全确定了梯度，式(5-14)就是用$u(M)$在x、y、z轴方向的变化率来确定梯度的。另一方面，梯度$\mathrm{grad}u(M)$不仅给出了数量场$u(M)$在点M处具有最大变化率的方向和数值；而且，只要知道了梯度，就知道$u(M)$在场中每一点处沿任一方向的变化率。因此，梯度矢量$\mathrm{grad}u(M)$完全刻划了数量场$u(M)$的变化和不均匀性。

2）数量场$u(M)$中任一点M处的梯度，垂直于过该点的等值面，且指向$u(M)$增加的方向。即有

$$\mathrm{grad}u(M)=\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}^0 \tag{5-16}$$

其中$\boldsymbol{n}^0$为该等值面的法向的单位法矢量。

关于梯度的这一特性，可以证明如下。

在图5-12中，设$u(x,y,z)=C$为过M点的等值面方程，再过点M作等值面σ的切平面π。由于等值面σ的法向$\boldsymbol{n}^0=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$与过$M$点的切平面$\pi$相垂直，于是由式(5.14)可知，梯度$\mathrm{grad}u(M)$与$n$的方向相同，因而它与此等值面正交。又由于函数$u(M)$沿着梯度矢量的方向增加得最快，可知所述梯度矢量指向$u(M)$增加的方向(即由数值较低的等值面指向数值较高的等值面)，而它的模等于$u(M)$沿该法线方向n的方向导数，因此式(5.16)成立。不难看出，该式表明了以上所讨论的有关梯度矢量的几何意义。

这一特性称为数量场的梯度与其等值面的正交性质。

至此，我们从数性函数出发，导出了一个梯度，它是一个与点的数性函数有关的矢性函数。由于梯度矢量具有上述性

质，不言而喻，它是数量场中一个重要概念。如果将数量场中每一点处的梯度矢量，与场中之点一一对应起来，这时就从数量场确定了一个由梯度矢量所形成的矢量场，且称为由该数量场产生的梯度场。这样，对数量场的研究就可转化为对梯度矢量场的研究。

3．梯度的运算法则

1）引入哈密顿（Hamilton）算子

函数$u(M)$在点M处的梯度由下式表示：

$$\mathrm{grad}\,u(M)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

将这个式子改写为

$$\mathrm{grad}\,u(M)=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

现引入一个矢性微分算子

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\qquad(5\text{-}17)$$

通常称为哈密顿算子（读作“那勃拉$Nabla$”）。需要指出的是，∇既是一个微分运算符号，但同时又要当作矢量看待。它的运算规则是

$$\nabla u=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\qquad(5\text{-}18)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\qquad(5\text{-}19)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{5-20}$$

这样，由式(5-18)，就可将函数$u(M)$的梯度简记为

$$\mathrm{grad}\,u(M) = \nabla u \tag{5-21}$$

2）**定理3** 设有一矢量$\boldsymbol{a}$，如果对于任意矢径$\boldsymbol{r}$的微分$d\boldsymbol{r}$与数性函数$u(M)$，有

$$du = \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

则有

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,u$$

证 函数$u(M) = u(x, y, z)$的全微分为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

又

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

而

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$$

因此有

$$du = \mathrm{grad}\,u \cdot d\boldsymbol{r}$$

将上式与$du = \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$相减，得

$$(\boldsymbol{a}-\mathrm{grad}u)\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

因为$d\boldsymbol{r}$为任意矢量，则必有$(\boldsymbol{a}-\mathrm{grad}u)=0$。 故得

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}u$$

3）梯度的基本运算公式

$$\mathrm{grad}C=0 \qquad (C\text{为常数}) \tag{5-22}$$

$$\mathrm{grad}Cu=C\mathrm{grad}u \qquad (C\text{为常数}) \tag{5-23}$$

$$\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}u\pm\mathrm{grad}v \tag{5-24}$$

$$\mathrm{grad}(uv)=u\mathrm{grad}v+v\mathrm{grad}u \tag{5-25}$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=(v\mathrm{grad}u-u\mathrm{grad}v)/v^2 \tag{5-26}$$

$$\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u \tag{5-27}$$

其中u、v、f都是具有连续偏导数的数量场，而式(5-27)表示复合场的梯度求法。

我们来证明其中的式(5-25)和式(5-27)。

事实上，因为

$$\mathrm{grad}(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=u\mathrm{grad}v+v\mathrm{grad}u$$

文

$$\mathrm{grad}f(u)=\left\{\frac{\partial f(u)}{\partial x},\ \frac{\partial f(u)}{\partial y},\ \frac{\partial f(u)}{\partial z}\right\}$$

$$=\left\{\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$=f'(u)\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$=f'(u)\mathrm{grad}u$$

下面举几个计算梯度的例子。

例5.10 求数量场 $u(x,y,z)=xyz+z^2+5$ 的梯度场，以及在点 $M(0,1,-1)$ 的梯度和 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 的最大值、最小值。

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$，$\frac{\partial u}{\partial y}=xz$，$\frac{\partial u}{\partial z}=xy+2z$。由式（5-21），得梯度场

$$\mathrm{grad}u=\nabla u=\{yz,xz,xy+2z\}$$

而在点M的梯度$\mathrm{grad}u(M)=\{-1,0,-2\}$。按梯度的定义及性质可知，梯度$\mathrm{grad}u$是$u(M)$在点$M$处上升得最快的方向，而梯度的反方向（即$-\mathrm{grad}u$）是$u(M)$在点$M$处下降得最快的方向。因此，$\frac{\partial u}{\partial l}$在$M$点的最大值，即为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\mathrm{grad}u(M)|=\sqrt{5}$$

最小值为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-|\mathrm{grad}u(M)|=-\sqrt{5}。$$

例5.11 求数量场

$$u(x,y,z)=xy+yz+zx$$

在点$M(1,2,3)$处沿其矢径方向的方向导数。用以下二种方法：

（1）直接应用方向导数；

（2）作为梯度在该方向上的投影。

解 （1）点的位矢$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，模$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{14}$，$\boldsymbol{r}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\Big[y+z\Big]_M=5,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\Big[x+z\Big]_M=4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\Big[x+y\Big]_M=3$$

代入式(5-8)，得到沿$\boldsymbol{r}$方向的方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_M=5\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{22}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}\sqrt{14}$$

（2）方向导数等于梯度在该方向上的投影。

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}u|_M&=[(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}]|_M\\&=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

又

$$\boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_M=\operatorname{grad}u\Big|_M\cdot\boldsymbol{r}^0=5\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{22}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}\sqrt{14}$$

可见两种方法的结果相同。

例5.12 设数量场$u = \ln r$，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，则

（1）求使$u(x, y) = C$的等值线，

（2）求$\mathrm{grad}\,u$，

（3）求满足$|\mathrm{grad}\,u| = 1$的点。

解 因为$\ln r = C$，即$r = e^C$，于是有

$$x^2 + y^2 = e^{2C}$$

等值线是以原点为中心、e^C为半径的圆。又

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)$$

因此，满足$|\mathrm{grad}\,u| = 1$的点是

$$\sqrt{\frac{1}{r^4}(x^2 + y^2)} = 1$$

即

$$x^2 + y^2 = 1$$

它是圆心在原点的单位圆上的点。

例5.13 设$u(M) = 3x^2 + z^2 - 2yz + 2zx$。试求：

（1）$\mathrm{grad}\,u(M)$；

（2）等值面$3x^2 + z^2 - 2yz + 2zx = 0$上的点$M_0\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$处的单位法矢量$\boldsymbol{n}^0$（指向$u(M)$增加的方向）。

解 （1）$\mathrm{grad}\,u(M) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

$$= \{6x+2z, -2z, 2x-2y+2z\}$$

（2）根据梯度的性质，由式(5-16)可知，以上求出的梯度，就是等值面$u(M)$ = 常数上的一个法矢量。将M_0代入。得到等值面$3x^2+z^2-2yz+2xz=0$上点M_0处的法矢量$\mathrm{grad}\,u(M)=\{2,-2,1\}$，这一矢量的模为$\sqrt{4+4+1}=3$，于是所求的单位法矢量$\boldsymbol{n}^0$为

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{1}{3}\left\{2, -2, 1\right\}$$

例5.14 求函数$u(M)=r^m$的梯度，其中m是大于零的实数，而r为矢径$\boldsymbol{r}$的模

解法一 容易看出，等值面$u(M)=r^m$= 常数，乃是中心在坐标原点的一族球面。因而，等值面上任一点处的单位法矢量$\boldsymbol{n}^0$与指向该点的矢径$\boldsymbol{r}$共线。若以$\boldsymbol{r}^0$表示该矢径上的单位矢量，则由式(5-16)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,u &= \frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}^0 = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{n}^0 \\ &= \frac{\partial (r^m)}{\partial r}\boldsymbol{r}^0 = mr^{m-1}\boldsymbol{r}^0 \\ &= mr^{m-2}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

解法二 将函数$u(M)=r^m$看成r的函数，而r又是(x,y,z)的函数。则由梯度运算的基本公式(5-27)，有

$$\mathrm{grad}\,u = u'(r)\,\mathrm{grad}\,r = mr^{m-1}\,\mathrm{grad}\,r \qquad ①$$

因为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

则

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{grad}r=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}=\frac{1}{r}\{x,y,z\}$$

$$=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$$

代入式①，得

$$\text{grad}u=mr^{m-1}\frac{1}{r}\boldsymbol{r}=mr^{m-2}\boldsymbol{r}$$

解法三 将函数$u(M)$微分，有

$$du=d(r^m)=mr^{m-1}dr \qquad ②$$

再对恒等式$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^2$两边取微分，得

$$d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=2rdr$$

即有

$$d\boldsymbol{r}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$

代入式②，得

$$du=mr^{m-1}\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$

由本章定理3可知

$$\text{grad}u=mr^{m-2}\boldsymbol{r}。$$

例5.15 设有电量为q的点电荷置于坐标原点，则在周围空间任一点$M(x,y,z)$处，它所产生的电位为

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

其中ε是介电常数，$r=|\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。试求电位$V$的梯度。

解 由梯度运算的基本公式(5-27)，有

$$\text{grad}V=\text{grad}\frac{q}{4\pi\varepsilon r}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\text{grad}\,r$$

由于

$$\operatorname{grad} r=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

所以得

$$\operatorname{grad} V=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$$

又由电学知道，电荷q产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

于是有

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} V$$

其中$\boldsymbol{E}$为在点M处的电场强度。此式表明了电场强度与同一点处的电位梯度之间的关系。我们知道，等电位面是中心在原点的一族球面。而电场强度等于电位梯度的负值，这说明电场强度$\boldsymbol{E}$的方向与电位降落最快的方向一致，而它的大小则表明沿这一方向移动时，电位降落的快慢程度。由于场强$\boldsymbol{E}$沿矢径的方向，即球面的外法线方向，所以$\operatorname{grad} V$是指向原点的内法线方向。显然，$\boldsymbol{E}$与等电位面正交。

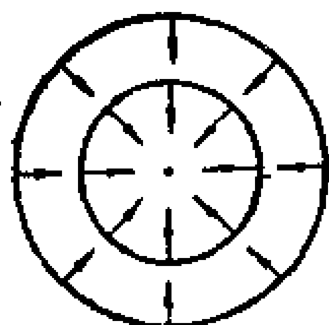


图5-13

图5-13 画出了电位V的梯度场，可以看出，它的等值面增加方向是指向原点的。在等值面上每一点处，沿电位增加方向的法矢量，就是数量场V在该点处的梯度方向。

例5.16 设有一温度场

$$T=T(M)=T(x,y,z)$$

由于场中各点的温度不尽相同，就要引起热的流动。而要描述热的流动，需要说明两点：一是热的流动方向；一是热的流动量。由理论和实验可知，热总是由温度较高的地方流向温度较低的地方，在场中任一点处，沿任一方向的热流强度（即在该点处于单位时间内垂直流过单位面积的热量）与在该方向上温度的变化率成正比。于是，沿l方向的热流强度为

$$-k\frac{\partial T}{\partial l}$$

其中的比例系数k叫做物质的导热系数，负号表示热量沿温度减小的方向流动。

因为$\frac{\partial T}{\partial l}$等于梯度矢量在$\boldsymbol{l}$方向的投影，故知$-k\frac{\partial T}{\partial l}$就等于矢量$-k\,\mathrm{grad}\,T$在$\boldsymbol{l}$方向的投影。若令

$$\boldsymbol{q}=-k\,\mathrm{grad}\,T \tag{5-28}$$

则有

$$-k\frac{\partial T}{\partial l}=|\boldsymbol{q}|\cos\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{l}\rangle$$

由此可见，当$\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{q}$的方向一致时，$\cos\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{l}\rangle=1$，这时热流强度$-k\frac{\partial T}{\partial l}$取得最大值$|\boldsymbol{q}|$。这表明在场中任一点处，矢量$\boldsymbol{q}$的方向表征了热流强度最大的方向，其模也正好表示最大热流强度的数值。因之，$\boldsymbol{q}$称为热流矢量，它是传热学中的一个重要概念。式(5.28)称为傅立叶（Fourier）定律。

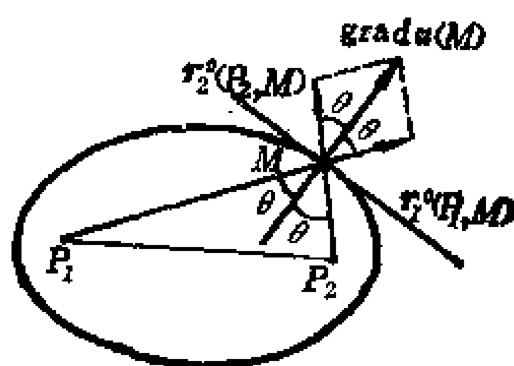


图5-14

例5.17 设P_1、P_2为两焦点，试证明旋转椭球面在点M的法线，平分两射线P_1M和P_2M的交角(图5-14)。

证 考察一数量场$u(M)=r_1(P_1,M)+r_2(P_2,M)$，这里$r_1(P_1,M_2)$，$r_2(P_2,M)$分别表示焦点$P_1$、$P_2$和$M$点之间的距离。显然，椭球面就是当$u(M)=$常数时的等值面。

按梯度运算的基本公式(5-24)，有

$$\mathrm{grad}u(M)=\mathrm{grad}r_1(P_1,M)+\mathrm{grad}r_2(P_2,M)$$

又由于

$$\mathrm{grad}r_1(P_1,M)=\boldsymbol{r}_1^0(P_1,M)$$

$$\mathrm{grad}r_2(P_2,M)=\boldsymbol{r}_2^0(P_2,M)$$

从而得

$$\mathrm{grad}u(M)=\boldsymbol{r}_1^0(P_1,M)+\boldsymbol{r}_2^0(P_2,M)$$

其中$\boldsymbol{r}_1^0(P_1,M)$，$\boldsymbol{r}_2^0(P_2,M)$分别表示从点$P_1$、$P_2$到点$M$方向上的单位矢量。

利用平行四边形法则，由$\boldsymbol{r}_1^0(P_1,M)$和$\boldsymbol{r}_2^0(P_2,M)$作出矢量$\mathrm{grad}u(M)$。因为$\boldsymbol{r}_1^0(P_1,M)$，$\boldsymbol{r}_2^0(P_2,M)$的模都为1，故知平行四边形的对角线等分二边的交角。又$\mathrm{grad}u(M)$位于函数$u(M)$的等值面在M点的法线上。由此可知，椭球面在M点的法线，平分两射线P_1M和P_2M的交角。

这种椭球面的几何性质在光学上有重要的应用。例如，若在其中一焦点P_1处置一光源，那么，由P_1发出来的光线，经椭球面反射后必然集中到另一焦点P_2处。

习　题

1. 设函数$u(M)=3x^2+z^2-2yz+2zx$。求$u(M)$在点$M_0(1,2,3)$处沿着矢量$\{6x+2z,-2z,2z-2y+2x\}$方向

的导数。

2. 已知数量场$u(x,y)=x^2y$，l是由点$M(1,1)$出发的与x轴正向夹角为$\theta=\frac{\pi}{6}$的一条射线，$\boldsymbol{l}^0$是l方向的单位矢量。求方向导数。

3. 求数量场$u(x,y,z)=xyz+z^2+5$在点$M(x,y,z)$处沿$\boldsymbol{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$的方向导数。其中$M_1(1,1,0)$，$M_2(3,2,1)$。

4. 设$u(M)=2xy-z^2$。试求

（1）$u(M)$在点$(2,-1,1)$处沿着从这点到点$(3,1,-1)$方向的方向导数。

（2）$u(M)$在点$(2,-1,1)$沿哪个方向的方向导数达到最大值？这最大值是多少？

5. 设数量场$u=x^2-xy+y^2$，求它在点$M(1,1)$沿方向$\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$的方向导数，并进一步求

（1）在怎样的方向上变化率有最大值？

（2）在怎样的方向上变化率有最小值？

（3）在怎样的方向上变化率为零？

（4）求u的梯度。

6. 设$u(x,y,z)$和$u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$是场中两邻近点$p(x,y,z)$和$Q(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$的温度，则

（1）解释$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)}{\Delta S}$的物理意义，其中$\Delta S$是$P$和$Q$两点间的距离。

（2）计算$\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{du}{dS}$，并说明其物理意义。

（3）求证$\frac{du}{dS}=\mathrm{grad}\,u\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dS}$。

7. 求数量场$u(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$在点$M(1,-2,-1)$处的梯度。

8. 证明$\text{grad}(u+v)=\text{grad}u+\text{grad}v$，其中$u$和$v$是$x,y,z$的可微数性函数。

9. 已知

$$\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$$
$$u=z^3-x^2y$$

试求在点$(-1,-1,1)$处的$\boldsymbol{a}\cdot\text{grad}u$和$\boldsymbol{a}\times\text{grad}u$。

10. 求曲面$x^2y+2xz=4$在点（2,-2,3）处的单位法矢量。

11. 画出平面场 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$中$u=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$的等值线(取0.01米为单位)，并画出场在点$M_1(2,\sqrt{2})$与$M_2(3,\sqrt{7})$处的梯度矢量，看其是否符合下面的事实：

(1) 梯度在等值线较密处的模较大，在较稀处的模较小；

(2) 在每一点处，梯度与过该点的等值线垂直，并指向u增大的方向。

12. 设有数量场$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，试求：

(1) 在点$O(0,0,0)$与$M(1,1,1)$处梯度的大小和方向余弦？

(2) 在哪些点上的梯度为零？

13. 试求函数$u=y^2+2yz-x^2$在点(1,2,1)处沿着方向$\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right\}$增加的速率。

14. 证明$\text{grad}u$ 是垂直于曲面 $u(x,y,z)=C$(C是常数)

的矢量。

15. 设数量场$u=\frac{1}{r}$，求grad$u$，其中

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。$$

16. 证明$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}$，其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}$为常矢。

17. 试求曲面$x^2+y^2=4z$上点(2,-4,5)处的切平面和法线。

18. 证明grad$u$为常矢的充要条件是u为线性函数，即$u=ax+by+cz+d$。(a,b,c,d均为常数)

§5.3 矢量场的散度

以上我们在数性函数$u(M)$可微的条件下，从数量场$u(M)$引出了一个矢量场(即由梯度所形成的场)。在这一节，我们要在矢性函数$\boldsymbol{a}(M)$满足一定的条件下，由矢量场$\boldsymbol{a}(M)$导出一个数量场(即由散度所形成的场)，从而可以利用散度所具有的性质来研究原有的矢量场。

为了便于对有关问题的讨论，这里先介绍几个常用术语：1)具有连续转动切线的空间曲线，叫做光滑曲线；具有连续转动法线的空间曲面，叫做光滑曲面。为了简便起见，通常把由有限多段不相交的光滑曲线弧连成的曲线，叫做简单曲线；而由有限多块不相交的光滑曲面片连成的曲面，叫做简单曲面。以下我们讨论的曲线和曲面，就是指的这种简单曲线及简单曲面。2)取定了正向，并以切线矢量$\boldsymbol{\tau}$表其正向的空间曲线，叫做有向曲线；对于任一空间曲面，通常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法矢$\boldsymbol{n}$是指向正侧的；若曲面是封闭的，则按习惯总是取外法线为法线正向，外侧为正侧，这种取

定了正侧的曲面，叫做有向曲面。

一、通量

通量是研究矢量场性质的一个很重要的概念，我们从流体运动的流速场入手来讨论这个问题。当流体流动时，其中每一点都具有一定的流速。在稳定流动的情况下，各点的流速矢量在流体所占的空间里形成一个稳定的流速场。而场中各点的速度矢量线就是流线，其上任一点的切线方向与该点速度矢量的方向一致。

单位时间内通过某一截面的流体的体积，叫做体积流量。以下只讨论体积流量，并简称为流量。

设$\boldsymbol{v}(M)$为一稳定流速场，其中的流体是不可压缩的(即流体的密度是常数，不妨取为1)，又设$\boldsymbol{S}$为场中一有向曲面。现在我们来计算：在单位时间内流体流过$\boldsymbol{S}$正侧的流量。

为此，在曲面$\boldsymbol{S}$上任取一点M与包含这点在内的一曲面元素dS(其面积亦记为dS)，由于dS甚小，故其上每一点处的速度矢量$\boldsymbol{v}$与法矢量$\boldsymbol{n}$都近似地看作不变，且与点M处的$\boldsymbol{v}$及$\boldsymbol{n}$相同。这样，流体穿过曲面元素dS的流量dQ，就充满以dS为底、$\boldsymbol{v}(M)$为母线的柱体(图5-15)，而这柱体的高是其母线在法矢量$\boldsymbol{n}$上的投影v_n。因此，穿过dS的流量(即柱体的体积)就近似地为

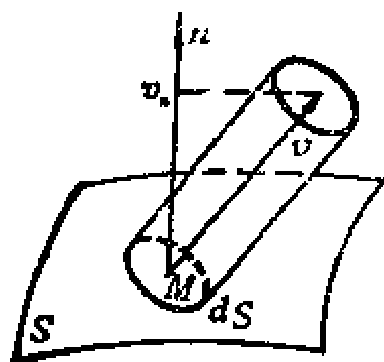


图5-15

$$dQ=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=v_n dS \qquad (5\text{-}29)$$

或

$$dQ=\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (5\text{-}29a)$$

其中$d\boldsymbol{S}$是点M处的一个矢量，其大小等于面积dS，方向与法

矢量$\boldsymbol{n}$一致。

于是，沿着曲面S积分，就得到在单位时间内流过曲面S正侧的流量

$$Q=\iint_S v_n dS=\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-30}$$

在流体力学中，"流量"这一概念有着较直观的物理意义，即它代表单位时间里流过截面的流体的体积，也就是穿过该截面的流线数目(图5-16)。

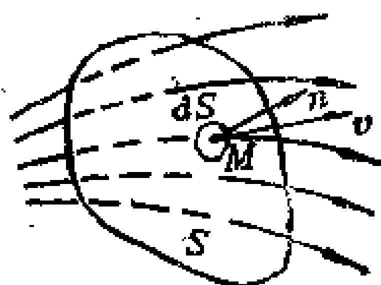


图5-16

事实上，对于其他一些具有不同物理属性的矢量场，也常常归结为这种形式的曲面积分。因而，可将流速场中"流量"这个概念推广到一般的矢量场，这就是所谓的通量。

例如，在电磁场中，若$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$为电场强度矢量)，则

$$\phi_E=\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-31}$$

称为电通量，也就是穿过曲面S正侧的电力线数目。若$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{B}$为磁感应强度矢量)，则

$$\phi_B=\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-32}$$

称为磁通量，也就是穿过曲面S正侧的磁力线数目。

为了便于研究，数学上就把形如上述的这一类曲面积分，概括成为通量的概念。

1. 通量的定义　设有矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，则沿场中一有向曲面S的曲面积分

$$\phi=\iint\limits_S a_n dS=\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-33}$$

叫做矢量场$\boldsymbol{a}(M)$向正侧穿过曲面S的通量。

在直角坐标系中，有

$$\boldsymbol{a}=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

又

$$d\boldsymbol{S}=dS\cos\langle\boldsymbol{n},x\rangle\boldsymbol{i}+dS\cos\langle\boldsymbol{n},y\rangle\boldsymbol{j}+dS\cos\langle\boldsymbol{n},z\rangle\boldsymbol{k}=dydz\boldsymbol{i}+dzdx\boldsymbol{j}+dxdy\boldsymbol{k}$$

则通量可以表示为

$$\begin{aligned}\phi=\iint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}&=\iint\limits_S(a_x\cos\langle\boldsymbol{n},x\rangle\boldsymbol{i}+a_y\cos\langle\boldsymbol{n},y\rangle\boldsymbol{j}\\&\quad+a_z\cos\langle\boldsymbol{n},z\rangle\boldsymbol{k})dS\\&=\iint\limits_S a_xdydz+a_ydzdx+a_zdxdy\end{aligned}\tag{5-34}$$

其中$\cos\langle\boldsymbol{n},x\rangle$、$\cos\langle\boldsymbol{n},y\rangle$、$\cos\langle\boldsymbol{n},z\rangle$为曲面$S$的法矢量$\boldsymbol{n}$的方向余弦。

如果S为封闭曲面，则式(5-33)表示成

$$\phi=\oiint\limits_S a_n dS=\oiint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-35}$$

这时外法线矢量$\boldsymbol{n}$规定作为曲面的正向。

例5.18 设S为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，其法矢量$\boldsymbol{n}$与$OZ$轴的夹角为锐角，求矢量场$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$向着$\boldsymbol{n}$方向穿过$S$的流量。

解 按题意，球面法矢量$\boldsymbol{n}$与矢径$\boldsymbol{r}$同向，则有

$$\cos\langle\boldsymbol{n},x\rangle=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\langle\boldsymbol{n},y\rangle=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\langle \boldsymbol{n}, z\rangle = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是由式(5-34)，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$向着$\boldsymbol{n}$方向穿过$S$的通量，

$$\begin{aligned}\phi=\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S \left(x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right.\\ &\quad + y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ &\quad \left.+ z\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dS\\ &=\iint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS\\ &=\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS\\ &=R\iint_S dS = 2\pi R^3\ .\end{aligned}$$

（最后一步是因为半球面面积等于 $2\pi R^2$）

例5.19 设由矢径$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$所构成的矢量场中，有一由圆锥面$x^2+y^2=z^2$及平面$z=h$ ($h>0$) 所围成的封闭曲面 S，试求穿出S的通量。

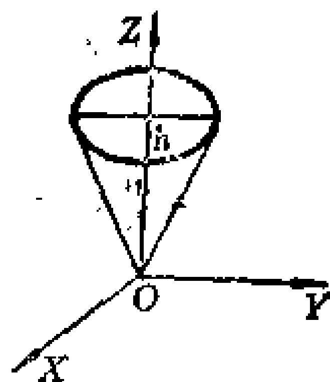


图5-17

解 如图5-17所示。曲面 S 包括平面部分和锥面部分，它们分别以S_1和S_2表示。则

$$\phi=\oiint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$$

其中

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

$$= \iint_{\sigma_1} h\,dxdy = h\iint_{\sigma_1} dxdy$$

$$= h\cdot\pi h^2 = \pi h^3$$

式中σ_1为S_1在xOy平面上的投影区域。

在锥面S_2上，因为$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{n}$垂直，故有

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} r_n dS = 0$$

所以

$$\phi = \oiint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} = \pi h^3$$

例5.20 求矢量场

$$\boldsymbol{a} = (x-y+z)\boldsymbol{i} + (y-z+x)\boldsymbol{j} + (z-x+y)\boldsymbol{k}$$

向外侧穿过椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的通量。

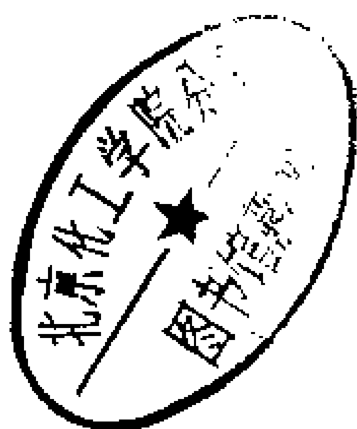
解 $\phi = \oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$

$$= \oiint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx$$

$$+ (z-x+y)dxdy$$

$$= 2\iint_{\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x-y+z)dydz + 2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1} (y-z+x)dzdx$$

$$+2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(z-x+y)dxdy$$



$$=6\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(z-x+y)dxdy$$

$$=6\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-x-y\right)dxdy$$

$$=4\pi abc$$

(这里为了简化计算，在计算过程中利用了被积函数和积分区域的对称性)。

2. 通量为正值、负值及零值时的物理意义

前已述及，在流速场$\boldsymbol{v}(M)$中，单位时间内通过曲面S上小面积元dS的流量，可表示为

$$dQ=\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=v\cos\theta dS$$

其中θ是dS的法矢量$\boldsymbol{n}$与速度矢量$\boldsymbol{v}$的夹角。不难看出，流量dQ实际上是一个代数值。因为，当流线是从dS的负侧穿到dS的正侧时，$\theta<\frac{\pi}{2}$，即$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}$相交成锐角，$\cos\theta>0$，此时$dQ>0$，流量为正[图5-18(a)]；反之，若流线是从dS的正侧穿到dS的负侧，则$\theta>\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}$成钝角，$\cos\theta<0$，此时$dQ<0$，流量为负[图5-18(b)]。由此可见，流量的数值是可正可负的，当面积元的取向确定后，dQ的正负取决于其法矢量与流速矢量间的夹角是锐角还是钝角。

因此，由式(5-30)

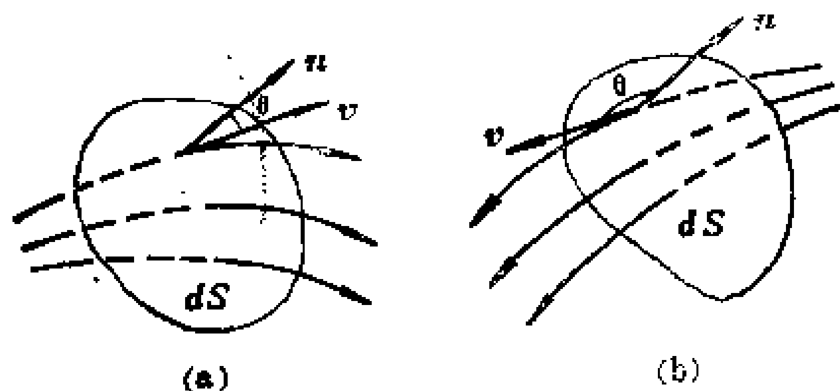


图5-18

$$Q=\iint\limits_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

给出的流量不是绝对值，而应理解为正流量与负流量的代数和。这就是说，若$Q>0$，就表示向正侧穿过S的流量多于沿相反方向穿过S的流量；反之，若$Q<0$，则表示向正侧穿过S的流量少于沿相反方向穿过S的流量；至于$Q=0$，这表示正流量与反流量恰好相等。

若讨论当S为封闭曲面时的情况，这时，由式(5-35)，流量可表示为

$$Q=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

由于法矢量的正向一般规定取为朝外，于是不难看出，流线沿着法矢量正向从外侧穿出，就是流体从曲面S所包围的区域Ω内流出；而流线沿着与法矢量相反的方向往内侧穿入，就是流体经过曲面S流入Ω内。上式中的积分就给出流体"流出"与"流入"的代数和。

当流量$Q>0$时，这表示流出多于流入，此时S内的流体向外发散，因而在S内必有产生流体的"源"。当$Q<0$时，流出少于流入，这时外面的流体向S内汇聚，说明S内必有消失流体

的"沟"。而当$Q=0$时，流出和流入的流体保持平衡。

通常把流体产生的部分叫做正源，而把流体消失的部分叫做负源。这样，$Q>0$，就说S内有正源；$Q<0$，则说S内有负源。

依此，在一般的矢量场$\boldsymbol{a}(M)$中，对于穿出封闭曲面S的通量ϕ，也视其值的正负，而说S内有正源或负源。当然，至于其源所表征的实际意义，则应视场的具体的物理特性而定。

例5.21 一电量为q的点电荷位于原点，则其电场中任一点M处的电位移矢量为

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^0$$

其中r是点电荷q到点M的距离，$\boldsymbol{r}^0$是从点电荷q指向点M的单位矢量。又设S是以点电荷为中心、R为半径的球面，求从内穿出S的电通量。

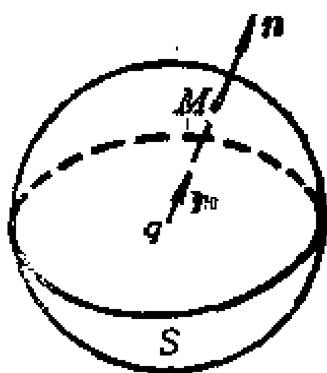


图5-19

解 如图5-19所示。在球面S上有$r=R$，且$\boldsymbol{r}^0$与法矢量$\boldsymbol{n}$的方向一致。则有

$$\phi_e=\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi R^2}\oiint_S \boldsymbol{r}^0\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi R^2}\oiint_S dS$$

$$=\frac{q}{4\pi R^2}\cdot 4\pi R^2=q$$

由此可见，电场中的点电荷q，就是球面S内产生电通量ϕ_e的源。当q是正电荷时为正源，q是负电荷时则为负源。

例5.22 设有一圆柱体V，它的底半径为R，高为H。若坐标原点位于圆柱下底的中心，求矢量场

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

向着正侧穿过柱面的通量。

解 如图5-20所示。因柱面S由圆柱的侧面和上、下两底组成，故有

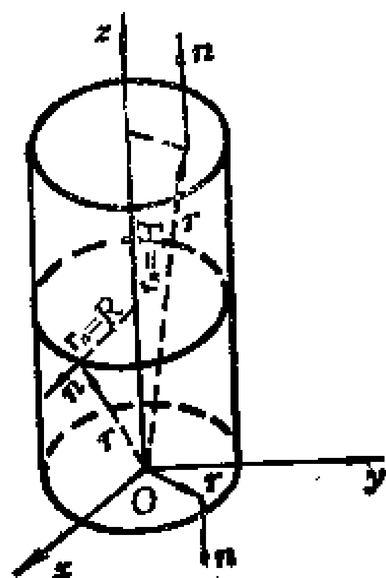


图5-20

$$\phi=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$$

其中，S_1为侧面，S_2为上底，S_3为下底。

在柱体侧面S_1上，任一点的外法矢量$\boldsymbol{n}$平行于xOy平面，而$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^0=R$。因此，

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}rndS=R\iint_{S_1}dS$$

$$=R\cdot 2\pi R\cdot H=2\pi R^2H$$

其中$\boldsymbol{n}^0$为单位法矢量。

在上底，法线平行于OZ轴，而$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^0=H$，因此，

$$\iint_{S_2}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_2}HdS=H\iint_{S_2}dS=\pi R^2H。$$

在下底，法线垂直于矢径，所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^0=0$$

于是

$$\iint_{S_3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^0dS=0$$

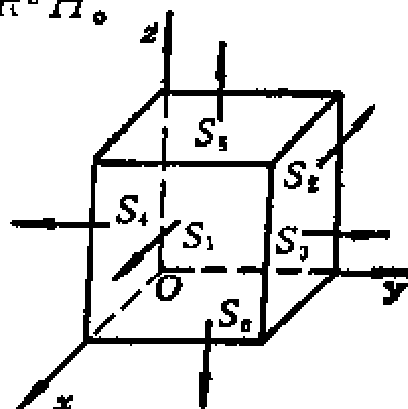


图5-21

综合以上的结果，得

$$\phi=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}=2\pi R^2H+\pi R^2H=3\pi R^2H$$

例5.23 求矢量场 $\boldsymbol{F}=\{x、y、z\}$ 向正侧穿过正六面体各侧的通量。设$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$。

解 如图5-21所示，

$$\phi=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint\!\!\!\oint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

其中S是由六个平面$S_i(i=1,2,\cdots,6)$组成的平行六面体边界面。而且，$S_1(x=a)$和$S_2(x=0)$，在$xOy(z=0)$及$zOx(y=0)$平面上的投影面积为零；$S_3(y=a)$和$S_4(y=0)$，在xOy及$yOz(x=0)$平面上的投影面积为零；而$S_5(z=a)$和$S_6(z=0)$，在yOz及zOx平面上的投影面积为零。这样，

$$\oint\!\!\!\oint_S x\,dydz=\sum_{i=1}^{6}\iint_{S_i}x\,dydz=\iint_{S_1}x\,dydz$$

$$+\iint_{S_2}x\,dydz=\int_0^a\int_0^a a\,dydz$$

$$-\int_0^a\int_0^a O\,dydz=a^3$$

同理，有

$$\oint\!\!\!\oint_S y\,dzdx=a^3$$

$$\oint\!\!\!\oint_S z\,dxdy=a^3$$

所以得

$$\phi=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=3a^3$$

显然，当$\boldsymbol{F}$从界面外穿过内侧时，应有

$$\phi = -3a^3$$

二、散度

对于一般的矢量场$\boldsymbol{a}(M)$和封闭曲面S，我们在前面已得到了通量的另一定义式

$$\phi = \oiint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}$$

由它给出的通量的大小，就标志出在S所围的某一空间区域内，流体发散或汇聚的情况。正因为这样，我们把流体向外侧穿过封闭曲面S的通量，特称为发散量。

一般说来，利用通量（或者说发散量）这种场积分，虽可描述某个矢量场中S内的源的性质，但仅此还不足以了解源在S内的分布情况，每一点处源的变化特性，以及源的强弱程度等问题，而散度就是研究场内任意点的性质的物理量。为此，有必要引入矢量场的散度概念。

1．散度的定义　　设有矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，于场中任取一点M，作一包含M点在内的任一闭曲面S，设它所包围的空间区域为Ω，以V表其体积。若当Ω以任意方式缩向M点时，通量与体积之比

$$\frac{\oiint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

的极限存在，则称此极限为矢量场$\boldsymbol{a}(M)$在点M处的散度，记作$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \lim_{\Omega \to M} \frac{\oiint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}}{V} \tag{5-36}$$

由这个定义式可知，散度div$\boldsymbol{a}$为一数量，它表示矢量场中一点处的通量对体积的空间变化率(或者叫做通量Φ在M点的体密度)，也就是在该点处对一个单位体积来说的通量，称为该点处源的强度，因此，散度描述了场中给定点处源的强弱。同时，它又可看作空间点的数性函数，是由矢量场产生的，而又描述该矢量场源的变化特性的数量场，因而div$\boldsymbol{a}$就称为$\boldsymbol{a}$的散度场。

例如，当div$\boldsymbol{a}(M)>0$时，通量从M点向外散发出去[图5-22(a)]，M点称为源点(或正源)。当div$\boldsymbol{a}(M)<0$时，通量从场周围散发，而在M点被吸收[图5-22(b)]，M点称为汇点(负源或沟)。这样，散度的绝对值$|$div$\boldsymbol{a}(M)|$，就相应地表示在该点处散发通量或吸收通量的强度。当div$\boldsymbol{a}(M)=0$时，就表示在M点处既不散发、也不吸收通量，M点称为无源的。

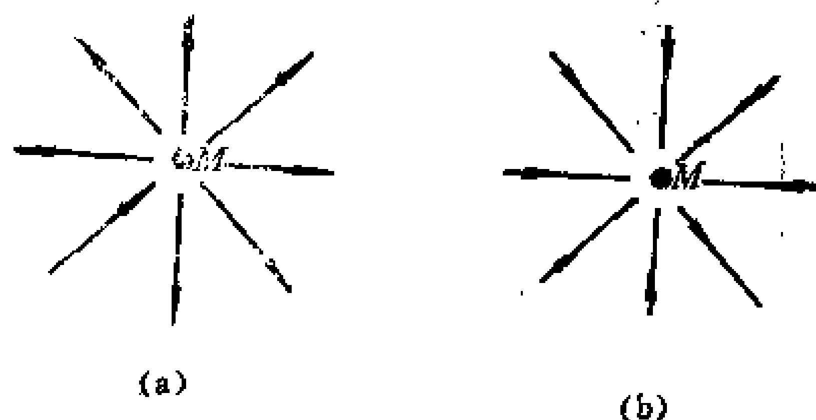


图5-22

若在矢量场$\boldsymbol{a}(M)$中，每一点处都有div$\boldsymbol{a}\neq 0$，则$\boldsymbol{a}(M)$称为有源场；反之，若每一点处都有div$\boldsymbol{a}=0$，则$\boldsymbol{a}(M)$称为无源场。此外，若在矢量场中，只在某一区域内的每一点处div$\boldsymbol{a}\neq 0$，则该区域称有源区域；而区域内每一点处div$\boldsymbol{a}=0$，就称为无源区域。

通过以上的讨论可以看出，正如梯度与方向导数有着密切的联系一样，散度与通量也是紧密地联系在一起的。散度是场论中基本概念之一，它描述在某一点处矢量场的通量相对于体积的变化率，这就反映出场在一点附近的变化情况，因而是刻划场源分布不均匀性的特征量。

2. 散度的解析表示式

1）高斯公式

定理5.4 设有矢量场$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$a_x,a_y,a_z$在任一光滑闭曲面$S$上，及其所围区域$\Omega$内，具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{a}dV \tag{5-37}$$

这个式子称为高斯(Gauss)公式。其中曲面积分取在S的外侧；$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$。

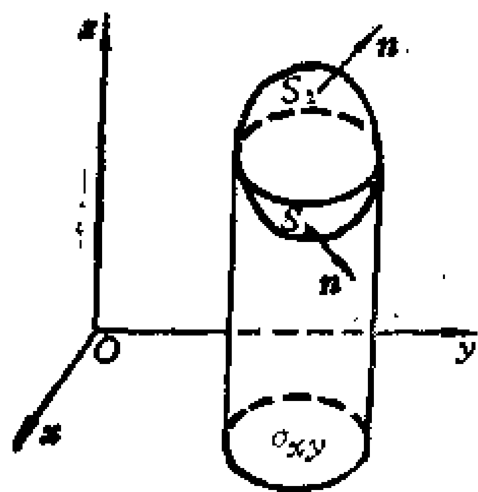


图5-23

证 设任一平行于坐标轴的直线与Ω的交点不多于两个。将S分为S_1，S_2两部分(图5-23)，它们的方程分别为

$$z=z_1(x,y)$$

$$z=z_2(x,y)$$

因为Ω在xOy平面的投影域为σ_{xy}，于是按曲面积分计算法，有

$$\oiint_S a_z dxdy=\iint_{S_2} a_z dxdy+\iint_{S_1} a_z dxdy$$

$$=\iint_{\sigma_{xy}} a_z(x,y,z_2)dxdy-\iint_{\sigma_{xy}} a_z(x,y,z_1)dxdy$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} [a_z(x,y,z_2) - a_z(x,y,z_1)] dxdy$$

又根据化三重积分为累次积分的方法，有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz = \iint_{\sigma_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} [a_z(x,y,z_2) - a_z(x,y,z_1)] dxdy$$

比较以上两式，得

$$\oiint_S a_z dxdy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz$$

同理可得

$$\oiint_S a_y dzdx = \iiint_{\Omega} \frac{\partial a_y}{\partial y} dxdydz$$

$$\oiint_S a_x dydz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial a_x}{\partial_x} dxdydz$$

将以上三式加到一起，即可得式(5-37)。

高斯公式表明，矢量 $\boldsymbol{a}$ 穿过闭合曲面 S 的通量，就等于 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 在域 Ω 内的三重积分。这样，对于通量的计算，就可以化为三重积分的计算。

2) 以下建立散度

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Omega \to M} \frac{\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

在直角坐标系中的计算公式。

定理5.5 矢量场

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

在场中任一点 $M(x,y,z)$ 处的散度为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{5-38}$$

证 设a_x, a_y, a_z具有一阶连续偏导数。由

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\oiint_S a_x dydz+a_y dzdx+a_z dxdy$$

于是应用高斯公式(5-37)，可将上式右端的曲面积分化为三重积分

$$\oiint_S a_x dydz+a_y dzdx+a_z dxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

这里的曲面积分取在S的外侧，三重积分展布在域Ω之上。代入上式，得

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

用V除等式两边，有

$$\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

对右端应用积分中值定理，则得

$$\frac{1}{V}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]_{M^*}V$$

其中的附标M^*，表示方括弧中的函数在M^*点取值，而M^*为Ω内的某一点。由此

$$\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\left[\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]_{M^*}$$

当$V\to 0$，即Ω缩向M点时，M^*就趋近于点M。所以

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\Omega\to M}\left[\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]_{M^*}$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

由此即得出式(5-38)，这就是散度的解析表示式。

本定理表明，对于矢量场$\boldsymbol{a}$，必存在一个描述场中每一点处源的特性的数量场——散度场；而且，可把求散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$的计算，转化为求 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的微分运算，从而可利用散度来研究矢量场。

应用哈密顿算子，由式(5-19)，可将散度表示为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{5-39}$$

高斯公式(5-37)也可写作

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV \tag{5-40}$$

根据这个定理，还可得出以下的推论。

推论1 由高斯公式可知，若在封闭曲面S内处处有$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，则

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

推论2 若矢量场$\boldsymbol{a}$内某些点(或某一区域上)有$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\neq 0$或$\operatorname{div}\boldsymbol{a}$不存在，而在其他的点上恒有$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$。则穿出包围这些点(或区域)的任一封闭曲面的通量都相等，即为一常数。

证 如图5-24所示。设$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\neq 0$，或$\operatorname{div}\boldsymbol{a}$不存在之点在区域$R$内。$S_1$和$S_2$是两个包围$R$在内，但互不相交的光滑闭曲面，分别以$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$为其外向法矢量，而$\Omega$为$S_1$与$S_2$所包围的区域。按题意，在$\Omega$内处处有$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$依此，由高斯公式，有

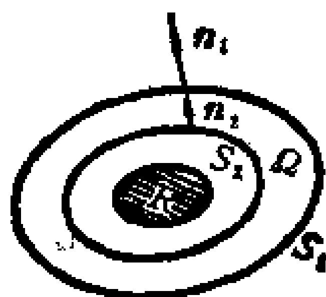


图5-24

$$\oiint_{S_1+S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,dV=0$$

即有

$$\oiint_{S_1+S_2} a_n dS=0$$

其中a_n为矢量$\boldsymbol{a}$在Ω的边界面的外向法矢量 n 方向上的投影。不难看出，n在S_1上与n_1相同，但在S_2上则与 n_2 的指向相反。因此，由上式有

$$\oiint_{S1} a_{n1} dS-\oiint_{S2} a_{n2} dS=0$$

移项得

$$\oiint_{S1} a_{n1} dS=\oiint_{S2} a_{n2} dS$$

3. 散度运算的基本公式

1) $\mathrm{div}(C\boldsymbol{a})=C\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ （C为常数） (5-41)

2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\pm\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}$ (5-42)

3) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{a})=u\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\,u$ (5-43)

其中u是点M的数性函数。

我们来推导第三个公式。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(u\boldsymbol{a})&=\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}+\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}+\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}\\&=u\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}a_x+u\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}a_y+u\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}a_z\\&=u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+\left(a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=u\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\,u\end{aligned}$$

例5.24 求下列矢量场的散度：

(1) $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}-3xy\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{a} = -3x^2z\boldsymbol{i} + 6xyz\boldsymbol{j} + 7z\boldsymbol{k}$

解 (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

$$= 2x - 3x + x = 0$$

可见，给定的矢量场$\boldsymbol{a}$为无源场。

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = -6xz + 6xz + 7 = 7$

所以，$\boldsymbol{a}$是有源场。

例5.25 设矢量场

$$\boldsymbol{a} = \{xy + z, yz + x, zx + y\}$$

求$\boldsymbol{a}$的散度场，并讨论源的性质。

解 $a_x = xy + z, a_y = yz + x, a_z = zx + y$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = y, \ \frac{\partial a_y}{\partial y} = z, \frac{\partial a_z}{\partial z} = x,$$

于是，$\boldsymbol{a}$的散度场为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = y + z + x$$

当$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = 0$时，即$x + y + z = 0$。因为这是散度场$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$的一个等值面，是过坐标原点的一个平面，所以在这个平面上是无源的。

当$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = C$（$C$为不等于零的任意常数）时，即$x + y + z = C$。同样，这也是散度场$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$的等值面，是一族互相平行的平面，$\boldsymbol{a}$在这族平面上是有源的。显然，对于$C>0$的平面而言，平面上每一点都是正源（源点），而在$C<0$的平面上，每一点都是负源（汇点）。

例5.26 点电荷q置于坐标原点，在它所产生的静电场中，求电位移矢量$\boldsymbol{D}$在任一点M处的散度$\mathrm{div}\boldsymbol{D}$。

解 $\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，其中$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$，

有 $$D_x=\frac{qx}{4\pi r^3},\quad D_y=\frac{qy}{4\pi r^3},\quad D_z=\frac{qz}{4\pi r^3}$$

于是得

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^3},\quad \frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^3}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{D}&=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\\&=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^3}\\&=0\qquad (r\neq 0)\end{aligned}$$

由此可见，除去点电荷q所在的坐标原点($r=0$)外，电场的散度处处为零，即为一无源场。因此，由推论2和例5.21的结果可知，电场穿过任何包含点电荷q在内的封闭曲面S的电通量都等于q，即

$$\phi_e=\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q$$

通量是可以迭加的。若有$q_1,q_2,\cdots q_n$等n个点电荷，它们分布在n个不同的点上，则穿出包围这n个点电荷在内的任一封闭曲面S的电通量ϕ_e，就可以看成是由S内每一点电荷$q_i(i=1,2,\cdots,n)$所产生的、并穿出S的电通量$\phi_i=q_i$的代数和，即有

$$\phi_e=\sum_{i=1}^{n}\phi_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=Q$$

这表明，穿出任一封闭曲面S的电通量，等于其内各点电荷的代数和。这就是电学上的高斯定理。

于是，根据高斯定理，在电荷连续分布的电场中，电位移

矢量$\boldsymbol{D}$的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\Delta Q}{V}=\rho$$

其中ρ是电荷分布的体密度。

例5.27　若$\mathrm{div}\,u(r)\boldsymbol{r}=0$，求$u(r)$。其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

解　令

$$\boldsymbol{F}=u(r)\boldsymbol{r}=u(r)x\boldsymbol{i}+u(r)y\boldsymbol{j}+u(r)z\boldsymbol{k}$$

$$F_x=u(r)x,\quad F_y=u(r)y,\quad F_z=u(r)z$$

于是

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[u(r)x]=\frac{\partial u(r)}{\partial x}x+u(r)$$

$$=u'(r)\frac{\partial r}{\partial x}x+u(r)=u'(r)\frac{x^2}{r}+u(r)$$

同理，可得

$$\frac{\partial F_y}{\partial y}=u'(r)\frac{y^2}{r}+u(r)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}=u'(r)\frac{z^2}{r}+u(r)$$

则有

$$\mathrm{div}\,u(r)\boldsymbol{r}=\nabla\cdot[u(r)\boldsymbol{r}]=3u(r)+ru'(r)$$

按题设

$$\mathrm{div}\,u(r)\boldsymbol{r}=0$$

即

$$3u(r)+ru'(r)=0$$

这是可分离变量微分方程，可化为

$$\frac{du(r)}{u(r)}=-3\frac{dr}{r}$$

积分得

$$\ln u(r) = -3\ln r + \ln C$$

由此，即得

$$u(r) = \frac{C}{r^3}$$

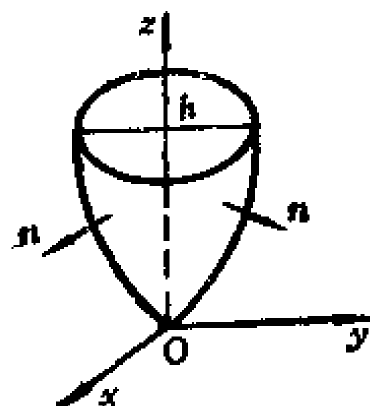
所以，当$u(r) = \frac{C}{r^3}$时，满足$\mathrm{div}\,u(r)\boldsymbol{r} = 0$，故$u(r)\boldsymbol{r}$是一无源场。

习　题

1. 设S为平面$x=0, x=b$；$y=0, y=b$；$z=0, z=b$所围成的立方体的边界面，求矢量场

$$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

向外侧穿过S面的通量。



第 2 题图

2. 求流速场

$$\boldsymbol{v} = (x + y + z)$$

在单位时间内向法矢量$\boldsymbol{n}$一侧穿过曲面$x^2 + y^2 = z\,(0 \leqslant z \leqslant h)$的流量。

3. 设封闭曲面为球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，求矢量场

$$\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$$

从内穿出球面S的通量。

4. 求矢量场

$$\boldsymbol{R} = (x - y + z)\boldsymbol{i} + (y - z + x)\boldsymbol{j} + (z - x + y)\boldsymbol{k}$$

向外侧穿出椭球面S $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$的通量。

5. 点电荷q_1、q_2分别位于两点M_1、M_2处，求从闭曲面S

内穿出的电通量Φ_e，其中S为

（1）不包含M_1，M_2两点的任一闭曲面；

（2）仅包含M_1点的任一闭曲面；

（3）同时包含M_1，M_2两点的任一闭曲面。

6. 计算：

（1）$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$，（2）$\mathrm{div}\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，

其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$。

7. 设矢量场

$$=\{y^2-z^2+3yz-2x,\ 3xz+2xy,\ 3xy-2xz+2z\}$$

求其散度场。

8. 证明 $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$，其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$。

9. 计算下列矢量场在给定点处的散度：

（1）$\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，在$M(1,1,3)$处；

（2）$\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，在$M(1,0,-1)$处；

（3）$\boldsymbol{a}=xyz\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，在$M(2,1,1)$处。

10. 设矢量场$\boldsymbol{F}=\{axz+x^2,\ by+xy^2,\ z-z^2+cxz-2xyz\}$，试确定常数$a$、$b$、$c$，使得$\boldsymbol{F}$为一无源场。

11. 已知$u=x^3y^4z^2$，试求一矢量$\boldsymbol{a}$，使得$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\,u$，并由此求$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$。

12. 设$\boldsymbol{a}$为常矢，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求下列各式的值：

（1）$\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})$，（2）$\nabla\cdot(r^2\boldsymbol{a})$，（3）$\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{a})$。（$n$为正整数）

13. 给定矢量场$\boldsymbol{a}=\{x^2+y^2+z^2,\ 3xyz,\ xy^2-zy^2\}$。试阐明在点$\left(2,1,-\dfrac{1}{2}\right)$处，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=0$。

14. 设有无限长导线与oz轴一致，通电流$I\boldsymbol{k}$后，在导线周围便产生磁场，其在点$M(x,y,z)$处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),\text{其中}r=\sqrt{x^2+y^2},\text{求}\operatorname{div}\boldsymbol{H}。$$

15. 已知$u=2x^3y^2z^4$，求$\nabla\cdot\nabla u$，(即div grad$u$)。

16. 设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求使div grad$f(r)=0$的$f(r)$。

§5.4 矢量场的旋度

以上我们从矢量场出发，导出了一个由散度所形成的数量场。而在这一节，我们要在矢性函数满足一定的条件下，导出另一个新的矢量场(由旋度所形成的场)。与矢量场的通量一样，矢量场的环量也是一个很重要的量；而且，旋度与环量又是紧密地联系在一起的。因此，我们先来讨论环量问题。

一、环量

在高等数学中，我们学过曲线积分

$$\int_l Pdx+Qdy+Rdz$$

其中l为有向曲线(即取定了正向，并以切线矢量τ表示其正向的曲线)，P、Q、R是l上的连续函数。

现设矢性函数$\boldsymbol{a}(M)$在有向曲线l上连续，a_x、a_y和a_z是它的三个分量，我们以a_x、a_y、a_z分别代替P、Q、R，于是上面的积分就变成

$$\int a_x dx+a_y dy+a_z dz$$

这个积分叫做场$\boldsymbol{a}(M)$沿曲线l的线积分。根据$\boldsymbol{a}(M)$所具有的不同的物理属性，该积分相应表示各种具体的物理意义及

特征。

例如，若$\boldsymbol{a}(M)$为一力场$[\boldsymbol{F}(M)]$，我们来求一质点在场力$\boldsymbol{F}$的作用下，沿闭曲线l正向运转一周所作的功。

如图5-25所示，在l上取曲线元dl（同时又以dl表其长），及其上一点M。则当质点运动经过dl时，场力$\boldsymbol{F}$所作的功就近似地等于

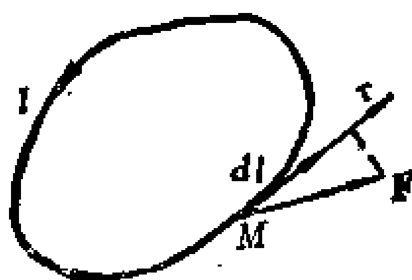


图5-25

$$dW=F_{\tau}dl=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

其中$\boldsymbol{\tau}$为曲线l上点M处的单位切线矢量，$d\boldsymbol{l}$为曲线元dl上点M处方向与$\boldsymbol{\tau}$一致的一个矢量，其模等于dl，F_{τ}为力$\boldsymbol{F}$在$\boldsymbol{\tau}$上的投影。由此，当质点沿封闭曲线l运转一周时，场力$\boldsymbol{F}$所作的功，就可表示为曲线积分，即

$$W=\oint_{l}F_{\tau}dl=\oint_{l}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (5-44)$$

这种形式的曲线积分，在其他具有不同物理属性的矢量场中，也常常表征一定的具体的物理意义。

譬如，在流速场$\boldsymbol{v}(M)$中，线积分

$$\oint_{l}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$$

称为流速矢量$\boldsymbol{v}$沿闭合回路l正向流动的环流。

又如，在磁场$\boldsymbol{H}(M)$中，根据安培环路定律，线积分

$$\oint_{l}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$$

表示沿与积分路线成右手螺旋法则的方向通过l上所张曲面S的各电流强度$I_1, I_2\cdots, I_n$的代数和，即有

$$\oint_{l}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum_{k=1}^{n}I_k$$

因此，为了研究上的方便，数学上就将上述这一类曲线积

分概括成为环量的概念。

1．环量的定义　设有矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，则沿场中某一封闭的有向曲线l的曲线积分

$$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{5-45}$$

叫做矢量场$\boldsymbol{a}(M)$按指定方向沿l的环量(或旋转量)。

通常，这种曲线积分总是假定沿回路的正方向，具体说来，对于某一给定的闭曲线l，其正方向就是当人们沿着它绕l前进时，由l所围成的区域的内部，总是出现在左手边。

在空间直角坐标系中，因为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{l}&=dl\cos(\tau,x)\boldsymbol{i}+dl\cos(\tau,y)\boldsymbol{j}+dl\cos(\tau,z)\boldsymbol{k}\\ &=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中$\cos\langle\tau,x\rangle$，$\cos\langle\tau,y\rangle$，$\cos\langle\tau,z\rangle$为l的切线矢量$\boldsymbol{\tau}$的方向余弦。于是环量可以写成

$$\begin{aligned}\Gamma&=\oint_l(a_x\cos\langle\tau,x\rangle+a_y\cos\langle\tau,y\rangle+a_z\cos\langle\tau,z\rangle)dl\\ &=\oint_l a_xdx+a_ydy+a_zdz\end{aligned} \tag{5-46}$$

例5.28　一个质量为m的质点，沿任一平面曲线l：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，从点$M(x(a),y(a))$移动到点$N(x(b),y(b))$，求重力所作之功。

解　如图5-26所示。由于作用在质点上的重力$\boldsymbol{F}=\{0,-mg\}$，故所作的功为

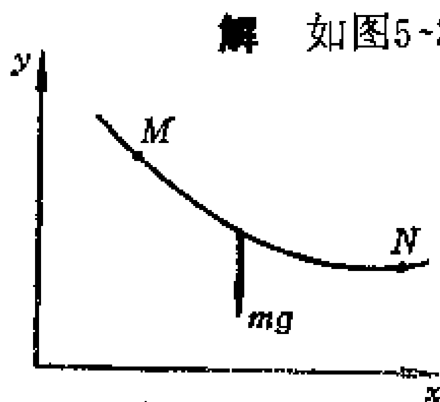


图5-26

$$\begin{aligned}W&=\int_l\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{y(a)}^{y(b)}-mgdy\\ &=\int_a^b-mgy'(t)dt\\ &=mg[y(a)-y(b)]\end{aligned}$$

这个结果表明，质点在重力场中移动时重力所作的功，只与质点的始、末位置有关，而与运动路径无关。因此，当质点沿任一闭合回路再回到原来位置时，重力所作之功(即环量)为零。

例5.29 已知矢量场

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

求沿折线l：$\overline{OM_1M_2M_3O}$（图5-27）的环量。其中L由$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$z=0$组成。

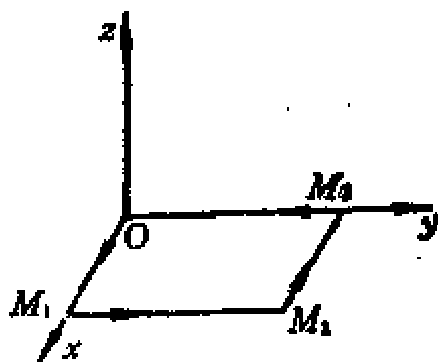


图5-27

解 $\boldsymbol{a}$沿l的环量为

$$\begin{aligned}\Gamma&=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}\\&=\int_{\overline{OM_1}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\overline{M_1M_2}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}\\&\quad+\int_{\overline{M_2M_3}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\overline{M_3O}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}\\&=\int_0^a xdx+\int_0^b ydy+\int_a^0 xdx+\int_b^0 ydy\\&=0\end{aligned}$$

例5.30 求矢量场

$$\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+E\boldsymbol{k}\qquad(E\text{为常数})$$

沿圆周$(x-2)^2+y^2=R^2$，$z=0$的环量。

解 已知圆周的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+R\cos\theta\\y=R\sin\theta\\z=0\end{cases}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

又

$$d\boldsymbol{l}=\{-R\sin\theta d\theta,R\cos\theta d\theta,0\}$$

则所求的环量为

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{a}_0 d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} (-R\sin\theta)(-R\sin\theta)d\theta$$

$$+(2+R\cos\theta)\cdot R\cos\theta d\theta = 2\pi R^2$$

例5.31 一质点M，以等角速度$\boldsymbol{\omega}=\{\omega_x,\omega_y,\omega_z\}$，绕$z$轴沿圆周$l: x=a\cos t, y=a\sin t, z=2$转动。求质点$M$的切线速度$\boldsymbol{v}$的环量。

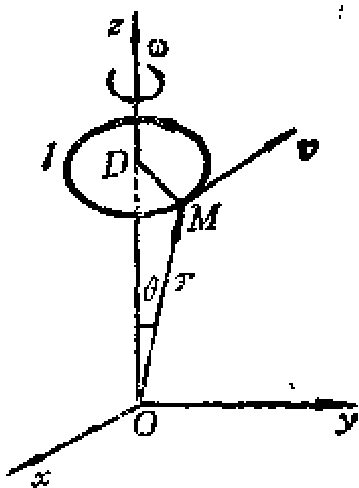


图5-28

解 如图5-28所示，从$\boldsymbol{\omega}$的正向来观察，点M是逆时针方向旋转的；设$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, |\boldsymbol{r}|=r$；因为$M$的轨迹是圆周，而圆的半径$a=|DM|$，即为$M$到$z$轴的垂直距离。又设$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{\omega}$的夹角为$\theta$，则$M$点速度的大小为$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|a=|\boldsymbol{\omega}|r\sin\theta$，而速度的方向与$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{r}$都垂直，且符合右手法则，于是有$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。注意到$\omega_x=\omega_y=0,\omega_z=\omega$，则有

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l (\omega_y z-\omega_z y)dx+(\omega_z x-\omega_x z)dy$$

$$+(\omega_x y-\omega_y x)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2\omega_y a\sin t-2\omega_x a\cos t+\omega_z a^2)dt$$

$$=2\pi a^2\omega$$

可见环量与角速度有关。

例5.32 设平面矢量场

$$\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

l为场中的星形线$x=R\cos^3\theta, y=R\sin^3\theta$，求此矢量场沿$l$正向的环量。

解 对于平面封闭曲线，取逆时针方向为其正向。依此，有

$$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_l -ydx+xdy$$

$$=\int_0^{2\pi}-R\sin^3\theta d(R\cos^3\theta)+R\cos^3\theta d(R\sin^3\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi}(3R^2\sin^4\theta\cos^2\theta+3R^2\cos^4\theta\sin^2\theta)d\theta$$

$$=3R^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{3}{8}R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\pi R^2$$

前面我们从方向导数出发，讨论了梯度场的变化特征。现在为了研究旋度，需要引入类似于方向导数那样的新概念，这就是环量面密度。

2．环量面密度　设矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，在场中取任一点M，且在M处取定一方向n，再过M点作以n为法矢、l为边界的微小曲面ΔS(同时又以ΔS表其面积)，n的指向与边界的正向构成右手螺旋关系(图5-29)。于是，当曲面ΔS在点M处保持以n为法矢的条件下，以任意方式缩向M时，若矢量场$\boldsymbol{a}$沿l正向的环量与面积ΔS之比的极限

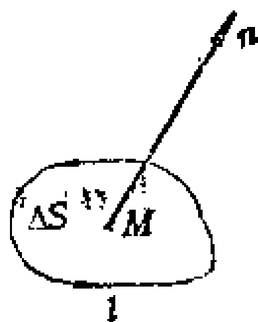


图 5-29

$$\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}\tag{5-47}$$

存在，则称它为$\boldsymbol{a}$在点M处沿方向n的环量面密度(亦即环量

的曲面面积的变化率)。

根据矢量场$\boldsymbol{a}$不同的物理属性,环量面密度相应地有着具体的物理意义。例如

(1) 在流速场$\boldsymbol{v}(M)$中,环量面密度为

$$\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_l \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta Q}{\Delta S}=\frac{dQ}{dS}$$

即在点M处与n成右手螺旋方向的环流对面积的变化率,亦简称为环流密度(或环流强度)。

(2) 在由磁场强度$\boldsymbol{H}$所构成的磁场中,环量面密度为

$$\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta I}{\Delta S}=\frac{dI}{dS}$$

即在M点处沿给定方向n的电流密度。

3. 环量面密度的计算式　给定矢量场$\boldsymbol{a}(M)$,在直角坐标系中,有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

因已假定a_x,a_y,a_z具有一阶连续偏导数,故可应用斯托克斯公式

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_l a_xdx+a_ydy+a_zdz=\iint_{\Delta S}\Big[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\langle n,x\rangle+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\langle n,y\rangle+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\langle n,z\rangle\Big]dS$$

用ΔS除两端,再在右端应用积分中值定理:

$$\frac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\frac{1}{\Delta S}\iint_{\Delta S}\Big[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\langle n,x\rangle+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$\cos\langle n,y\rangle + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\langle n,z\rangle\Big] dS$$

$$= \Big(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\langle n,x\rangle + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$\cos\langle n,y\rangle + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\langle n,z\rangle\Big)_{M^*}$$

右端角标M^*为ΔS上某一点，当$\Delta S \to M$时，有$M^* \to M$，则

$$\lim_{\Delta S \to M} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\oint_l \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S} = \Big[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha$$

$$+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$\cos\gamma\Big] \tag{5-48}$$

这就是环量面密度在直角坐标系中的计算公式，其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是在点M处n的方向余弦。

二、旋度

由以上的讨论可以看出，矢量场$\boldsymbol{a}$的环量面密度，仅仅表明，场在给定点和过该点的某个取定的方向上，环量的相对于面积的变化率。但过场中每一点，都可以引任意多个方向，由于沿不同方向有不同的环量面密度，因而对于空间每一点来说，环量面密度就有任意多个，即它是一个与方向有关的概念，正如数量场中的方向导数与方向有关一样。在那里，我们从方向导数出发，引出了一个梯度矢量，在给定点处，它的方向表出了最大方向导数的方向，它的模即为最大方向导数的数值；而且，它在任一方向上的投影，就给出该方向上的方向导数。这种情况启示我们去寻找这样一种矢量：它与环量面密

度的关系，正如梯度与方向导数之间的关系一样。

为此，我们来考察环量面密度的计算公式(5-48)，可以看出，它和方向导数的计算公式(5-8)十分类似。此外，它的右端是点M处两个矢量

$$\boldsymbol{A}=\left\{\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}$$

和

$$\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

的标积；或者，它可视为矢量$\boldsymbol{A}$在单位法矢量$\boldsymbol{n}^0$上的投影。因此，式(5-48)可以写为

$$\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^0=|\boldsymbol{A}|\cos\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{n}^0\rangle \tag{5-49}$$

此式表明，在给定点处，矢量$\boldsymbol{A}$在任一方向n上的投影，就给出该方向上的环量面密度。而且，环量面密度的大小将随着r的变化而变化，当$\boldsymbol{A}$与n同向(即夹角$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{n}^0\rangle$为零)时，环量面密度取得最大值$|\boldsymbol{A}|$。由此可知，$\boldsymbol{A}$的方向就是最大环量面密度的方向，其模即为最大环量面密度的数值。这说明，$\boldsymbol{A}$正是我们所要寻找的那种矢量，我们把它叫做矢量场$\boldsymbol{a}$的旋度。

1. 旋度的定义 设给定矢量场$\boldsymbol{a}$及场中一点M，若过点M处存在这样一个矢量$\boldsymbol{A}$，使得$\boldsymbol{a}$在M点沿其方向的环量面密度为最大，而这个最大的数值正好等于$\boldsymbol{A}$的模$|\boldsymbol{A}|$，则称矢量$\boldsymbol{A}$为矢量场$\boldsymbol{a}$在点M处的旋度，记作$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{rot}\boldsymbol{a} \tag{5-50}$$

显然，旋度的上述定义与坐标系的选择无关。当矢量场$\boldsymbol{a}$的三个分量具有连续偏导数时就可从它得出一个新的矢量场$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$。旋度矢量$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$表述了场$\boldsymbol{a}$在点$M$处的最大环量面密度，以及取得这个最大值的方向，作为空间点的矢性函数，它

描述了场在给定点处旋转的特性，所以，它是由矢量场 $\boldsymbol{a}$ 产生，而又描述该矢量场旋转的变化特性的矢量场。

此外，从式(5-49)，我们已经得到旋度的一个重要性质，就是旋度矢量在任一方向n上的投影，等于该方向上的环量面密度，即有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0=\mathrm{rot}_n\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} \tag{5-51}$$

因此，只要知道旋度矢量$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)$，也就知道了矢量场$\boldsymbol{a}$在点$M$处沿任意方向的环量面密度，所以$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)$完全刻划了矢量场$\boldsymbol{a}$的旋转运动情况。

例如，在流速场$\boldsymbol{v}(M)$中，对于给定点处的旋度矢量，它的方向就是最大环流密度的方向，其模即为最大环流密度的数值；并且，它在任一方向上的投影，就给出该方向上的环流密度。

同样，在磁场$\boldsymbol{H}(M)$中，旋度$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$是这样一个矢量，在给定点处，它的方向乃是最大电流密度的方向，其模就是最大电流密度的数值；而且，它在任一方向上的投影，就给出该方向上的电流密度，在电学上，$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$称为电流密度矢量。

若在矢量场$\boldsymbol{a}(M)$中，每一点都有$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\neq 0$，则$\boldsymbol{a}(M)$称为有旋场；反之，若每一点恒有$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$，则$\boldsymbol{a}(M)$称为无旋场。另外，若只在场中某一区域内，每一点$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\neq 0$，则该区域称为有旋区域；而若区域内每一点$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$，则称为无旋区域。

2. 旋度的解析表示式

1）斯托克斯Stokes公式

定理5·6 设有矢量场$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$a_x$、$a_y$、$a_z$在任一光滑闭曲线$l$上，及以$l$为边界所绷的光滑曲面$\sigma$上，具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_\sigma \nabla\times\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-52}$$

这个式子称为斯托克斯公式。其中σ取上侧，积分路径l的方向与σ上法矢量$\boldsymbol{n}$的指向一致（构成右手螺旋关系）；$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left\{\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}$。

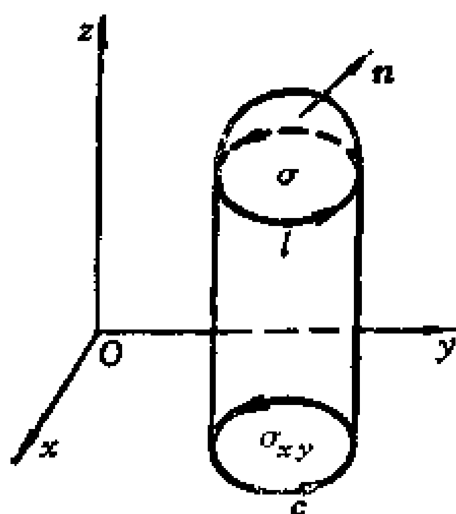


图5 30

证 设平行于z轴的直线，与σ至多交于一点，曲面σ的方程为$z=z(x,y)$，l与σ正向联系，它们在xOy平面上的投影应是逆时针的闭曲线c，及投影区域σ_{xy}（图5-30）。曲面元素矢量$d\boldsymbol{s}=\{dydz,dzdx,dxdy\}$，取$\sigma$为正侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是与此侧相应的法矢量$\boldsymbol{n}$的方向余弦，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

由于曲面元素dS在xOy、xOz平面的投影可分别表示为$dxdy=\cos\gamma ds$；$dzdx=\cos\beta ds$，即有$dzdx=-\frac{\partial z}{\partial y}dxdy$，于是有

$$\iint_\sigma \frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy-\frac{\partial a_x}{\partial z}dzdx=\iint_\sigma\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} \left[\frac{\partial a_x(x, y, z\langle x, y\rangle)}{\partial y} + \frac{\partial a_x(x, y, z\langle x, y\rangle)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] dx dy$$

因为

$$\oint_l a_x dx = \oint_c a_x\Big(x, y, z(x, y)\Big) dx \qquad (*)$$

对右边的积分应用格林(Green)公式，

$$\oint_c a_x dx + a_y dy = \iint_{\sigma_{xy}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy$$

这里，在所给的情况下，$a_x = a_x(x, y, z\langle x, y\rangle)$，$a_y = 0$，计算 $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ 时，需要求a_x直接对y的导数，以及通过第三变量 z 求对y的导数，而$z = z(x, y)$，则

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_x(x, y, z\langle x, y\rangle)}{\partial y} + \frac{\partial a_x(x, y, z\langle x, y\rangle)}{\partial z} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

于是式(＊)成为

$$\oint_l a_x dx = \oint_c a_x(x, y, z\langle x, y\rangle) dx$$

$$= -\iint_{\sigma_{xy}} \left[\frac{\partial a_x(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial a_x(x, y, z(x, y))}{\partial y} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right] dx dy$$

$$= -\iint_{\sigma} \left[\frac{\partial a_x}{\partial y} dx dy - \frac{\partial a_x}{\partial z} dz dx \right]$$

从而得

$$\oint_l a_x dx = \iint_\sigma \frac{\partial a_x}{\partial z} dzdx - \frac{\partial a_x}{\partial y} dxdy \tag{5-52a}$$

同理可证

$$\oint_l a_y dy = \iint_\sigma \frac{\partial a_y}{\partial x} dxdy - \frac{\partial a_y}{\partial z} dydz \tag{5-52b}$$

$$\oint_l a_z dz = \iint_\sigma \frac{\partial a_z}{\partial y} dydz - \frac{\partial a_z}{\partial x} dzdx \tag{5-52c}$$

将所得的三个等式(5-52a)、(5-52b)、(5-52c)相加，整理后就得到斯托克斯公式(5-52)。

这个公式连系了沿曲面边界的曲线积分与该曲面上的曲面积分，它类似于连系着沿某一空间区域表面的曲面积分与该区域上的三重积分的高斯公式。

在本定理中，若$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y\}$为平面矢量场，$l$为$xOy$平面的闭曲线，而$D$是以$l$为边界的平面域，则格林公式可写为

$$\oint_l \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_D \nabla \times \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{5-53}$$

其中$d\boldsymbol{S}$是D的面积元素矢量。因此，格林公式是斯托克斯公式的特例。

2）下面我们来建立旋度 rot$\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系中的计算公式。

定理5·7 设矢量场$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$a_x$、$a_y$、$a_z$在场中任一点$M(x, y, z)$，具有一阶连续偏导数；则

$$\text{rot}\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} \tag{5-54}$$

其中

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left\{\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}$$

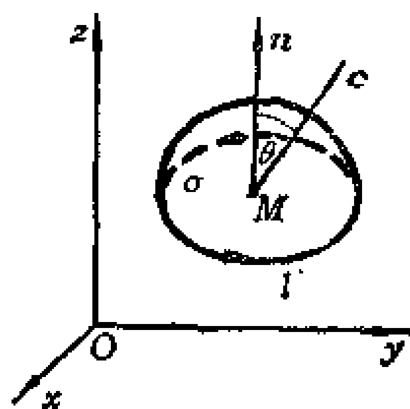


图5-31

证 设σ为以闭曲线l为边界的非闭光滑曲面(面积为ΔS)，M为其中的任一点，$\boldsymbol{n}$为过M点处的法矢量(图5-31)，其单位矢量是$\boldsymbol{n}^0$，令$\boldsymbol{c}=\nabla\times\boldsymbol{a}$则由式(5-48)，得

$$\lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma=\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0$$

$$=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}^0=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$$

其中θ为$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{c}$的夹角。当$\theta=0$时，$\cos\theta=1$，从而，$\lim\limits_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}$取得最大值$|\boldsymbol{c}|$，而且取得这个最大值的方向，就是$\boldsymbol{c}$的方向。于是根根旋度的定义，应有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=\nabla\times\boldsymbol{a}$$

由以上的讨论以及式(5-51)，在直角坐标系中，有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=\mathrm{rot}_x\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=\mathrm{rot}_y\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}$$

由此得

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}&=\operatorname{rot}_x\boldsymbol{a}\boldsymbol{i}+\operatorname{rot}_y\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}+\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a}\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{5-55}$$

这就是旋度矢量的解析表示式。

或者，写成行列式，即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}\tag{5-56}$$

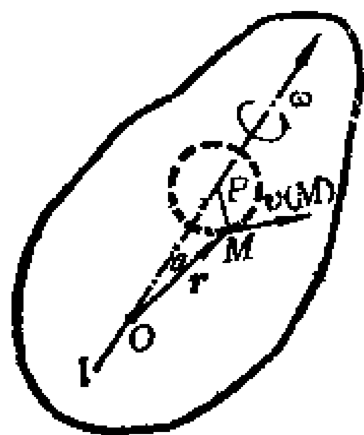


图5-32

例5.33 设一刚体绕过原点O的l轴转动（O点是刚体中一个固定不动的点），角速度的大小恒为ω（图5-32）。显然，当刚体转动时，其上任一点处，都有一线速度矢量$\boldsymbol{v}$，从而构成了一个线速度场$\boldsymbol{v}(M)$。求该线速度场$\boldsymbol{v}(M)$的旋度。

解 设$\boldsymbol{v}(M)$为刚体上任一点M的线速度矢量。容易看出，该速度的模等于M点到轴l的垂直距离$|PM|$乘以转动角速度的大小ω，方向垂直于通过转动轴l及点M的平面。在轴l上作一角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$，有$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$。又以$\boldsymbol{r}$表示由点$O$到点$M$的矢量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。于是由图可得

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=\omega r\sin\theta=\omega|PM|=|v|$$

即矢量$\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$与矢量$\boldsymbol{v}$的大小相等，又由图易见两者的方向也相同。因而

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$$

取O点为坐标原点，则

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$v_x=\omega_y z-\omega_z y,\ v_y=\omega_z x-\omega_x z,\ v_z=\omega_x y-\omega_y x$$

由式(5-55)，有

$$\mathrm{rot}_x\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=\omega_x+\omega_x=2\omega_x$$

$$\mathrm{rot}_y\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=\omega_y+\omega_y=2\omega_y$$

$$\mathrm{rot}_z\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\omega_z+\omega_z=2\omega_z$$

于是得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=2(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{w}$$

即$\boldsymbol{v}$的旋度是$\boldsymbol{w}$的二倍。这说明，在刚体旋转的线速度场中，任一点处的旋度，除去一个常数因子外，正好等于刚体的转动角速度(旋度由此而得名)。由此可见，矢量场的旋度，与场的转动性质有关。正是由于这种关系，所以在流体力学中，就用旋度是否为零来判断流体内部是否有漩涡存在，对于有旋的流动，我们称之为涡旋运动。

3. 旋度运算的基本公式

1) $\mathrm{rot}(C\boldsymbol{a})=C\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$　　(C为常数)　　(5-57)

2) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\pm\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$　　(5-58)

3) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{a})=u\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\mathrm{grad}u$　　(5-59)

4) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$ (5-60)

其中u为数量场，$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为矢量场，均有一阶连续偏导数。

我们来验证(5-59)、(5-60)两式。

(1)
$$u\boldsymbol{a}=ua_x\boldsymbol{i}+ua_y\boldsymbol{j}+ua_z\boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{rot}_x(u\boldsymbol{a})=\frac{\partial(ua_z)}{\partial}-\frac{\partial(ua_y)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot a_z+u\frac{\partial a_z}{\partial y}-a_y\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial a_y}{\partial z}$$

$$=u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+a_z\frac{\partial u}{\partial y}-a_y\frac{\partial u}{\partial z}$$

另外，由矢量代数，有

$$\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

于是

$$\operatorname{rot}_x(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}_x\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}u)_x$$

同理可得

$$\operatorname{rot}_y(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}_y\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}u)_y$$

$$\operatorname{rot}_z(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}_z\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}u)_z$$

所以

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}u$$

(2)
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$
= \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z)
$$

$$
+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x)
$$

$$
= \left(a_y \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial x} - a_z \frac{\partial b_y}{\partial x}\right.
$$

$$
\left. - b_y \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \left(a_z \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_x \frac{\partial a_z}{\partial y}\right.
$$

$$
\left. - a_x \frac{\partial b_z}{\partial y} - b_z \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) + \left(a_x \frac{\partial b_y}{\partial z}\right.
$$

$$
\left. + b_y \frac{\partial a_x}{\partial z} - a_y \frac{\partial b_x}{\partial z} - b_x \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)
$$

$$
= a_x \left(\frac{\partial b_y}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial y} \right) + a_y \left(\frac{\partial b_z}{\partial x}\right.
$$

$$
\left. - \frac{\partial b_x}{\partial z} \right) + a_z \left(\frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial x} \right)
$$

$$
+ b_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + b_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right.
$$

$$
\left. - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + b_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)
$$

$$
= -(a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i}\right.
$$

$$
+ \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x}\right.
$$

$$
\left.\left. - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} \right] + (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \cdot
$$

$$
\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right.\right.
$$

$$-\frac{\partial a_z}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}\Big]$$

由此，得

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$$

4. 旋度场与散度场、梯度场的关系

把哈密顿算子∇作用到数量场和矢量场，叫做一阶微分运算；而对数量场和矢量场使用两次∇运算所得的结果，叫做二阶微分运算。

设u为数量场，$\boldsymbol{a}$为矢量场，且a_x，a_y，a_z和u具有二阶连续偏导数。

1)
$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}u&=\nabla\times\nabla u\\&=\Big\{\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big),\ \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\\&\quad-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big),\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big\}\\&=\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\Big\}\\&=0\end{aligned}\tag{5-61}$$

因此，数量场u的梯度场，必为无旋场。

2)
$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y}$$

$$= 0 \tag{5-62}$$

即矢量场$\boldsymbol{a}$的旋度场，必为无源场。

3) $$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u$$

令
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

符号"Δ"叫做拉普拉斯(Laplace)算子。这样

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u = \Delta u \tag{5-63}$$

4) $$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \{\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \operatorname{rot}_y \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \operatorname{rot}_z \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\}$$

其中

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{a} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

展开括弧，并加减一项$\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_x\ \mathrm{rot}\boldsymbol{a}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\\&\quad-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2 a_x\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathrm{rot}_y\ \mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2 a_y$$

$$\mathrm{rot}_z\ \mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2 a_z$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{a}&=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{a}-\Delta^2\boldsymbol{a}\qquad(5\text{-}64)\\&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

以上几种关系式表述了场与场之间的内在联系。通过利用这些关系，可以简化场的计算。

例5·34 求位矢$\boldsymbol{r}$的旋度

解 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=0$$

例5·35 求$\text{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$,其中$f(r)$为可微函数。

解法一 $\text{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=\nabla\times[xf(r)\boldsymbol{i}+yf(r)\boldsymbol{j}+zf(r)\boldsymbol{k}]$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}$$

$$=\left(z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(y\frac{\partial f}{\partial z}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{f'(r)x}{r}$$

同理,有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f'(r)y}{r},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{f'(r)z}{r}$$

所以

$$\text{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=\left(z\frac{f'(r)y}{r}-y\frac{f'(r)z}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{f'(r)z}{r}-z\frac{f'(r)x}{r}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(y\frac{f'(r)x}{r}-x\frac{f'(r)y}{r}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

解法二　按旋度运算基本公式(5-59)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]&=f(r)\mathrm{rot}\boldsymbol{r}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{r}\\&=0+[f'(r)\mathrm{grad}\boldsymbol{r}]\times\boldsymbol{r}\\&=\left[f'(r)\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\right]\times\boldsymbol{r}=0\end{aligned}$$

由此可见，一切形如$f(r)\boldsymbol{r}$一类的场都是无旋场。例如，引力场$\boldsymbol{F}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$与电场强度矢量场$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$（它们的$r\neq0$），就都是无旋场。

例5.36　对矢量场

$$\boldsymbol{a}=(2x-y)\boldsymbol{i}-yz^2\boldsymbol{j}-y^2z\boldsymbol{k}$$

验证斯托克斯定理。其中σ是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$，而l是它的边界。

解　显然，σ的边界l是xOy平面上以原点为中心半径为1的圆。设l的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=0\end{cases}\qquad(0\leqslant t<2\pi)$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}&=\oint_l[(2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz]\\&=\int_0^{2\pi}(2\cos t-\sin t)(-\sin t)dt=\pi\end{aligned}$$

而

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}$$

则

$$\iint_{\sigma}(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{\sigma}\boldsymbol{k}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{\sigma_{xy}}dxdy$$

因为$\boldsymbol{k}\cdot d\boldsymbol{s}=dxdy$，且$\sigma_{xy}$是$\sigma$在$xOy$平面上的投影。所以得

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dxdy=4$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dydx=4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\pi$$

于是斯托克斯定理得到了验证。

例5.37 设有两矢量场

$$\boldsymbol{a}=\{y^2-z^2+3yz-2x,3xz+2xy,3xy-2xz+2z\}$$

$$\boldsymbol{b}=\{z^2+2x+3y,3x+2y+z,y+2xz\}$$

试证明：

（1）$\boldsymbol{a}$既是无旋场，又是无源场；

（2）$\boldsymbol{b}$只是无旋场，而不是无源场。

证 （1）

$$\mathrm{rot}_x\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=3x-3x=0$$

$$\mathrm{rot}_y\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=-2z+3y-3y+2z=0$$

$$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 3z + 2y - 2y - 3z = 0$$

于是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = 0$$

故$\boldsymbol{a}$为无旋场。又

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$= -2 + 2x - 2x + 2 = 0$$

则$\boldsymbol{a}$又是无源场。

（2） $\mathrm{rot}_x \boldsymbol{b} = 1 - 1 = 0$

$\mathrm{rot}_y \boldsymbol{b} = 2z - 2z = 0$

$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{b} = 3 - 3 = 0$

则

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{b} = 0$$

但

$$\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 2 + 2 + 2x \neq 0$$

所以$\boldsymbol{b}$是无旋场，但不是无源场。

例5·38 若矢量场

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{i} - 2zy\boldsymbol{j} + (x^2 - z)\boldsymbol{k}$$

求$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$、$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$、$\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{a}$、$\nabla^2\boldsymbol{a}$；验证$\mathrm{div\ rot}\boldsymbol{a} = 0$

解 $a_x = \frac{1}{3}x^3$，$a_y = -2zy$，$a_z = x^2 - z$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = x^2,\quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = -2z,\quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 2y,\quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=0$$

则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=x^2-2z-1$$

可见，$\boldsymbol{a}$在$x^2-2z-1=0$的抛物柱面上是无源的；而在$x^2-2z-1=C(C\neq0)$的抛物柱面上是有源的。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{a}&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})=\nabla(x^2-2z-1)\\&=2x\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{a}&=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a}=\nabla\times(2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j})\\&=-4\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由式(5-64)，得

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{a}&=\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{a}-\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{a}\\&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{a}\\&=(2x\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k})-(-4\boldsymbol{k})=2x\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div\ rot}\boldsymbol{a}&=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j})\\&=\frac{\partial}{\partial x}(2y)+\frac{\partial}{\partial y}(-2x)=0\end{aligned}$$

习　题

1. 设矢量场

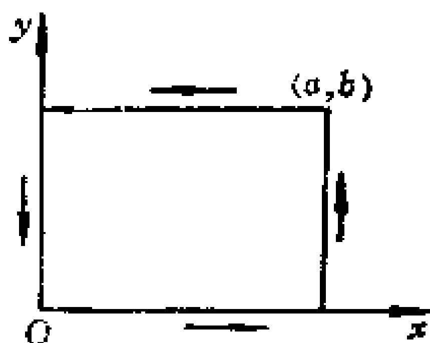
$$\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}\quad(C\text{为常数})$$

试求它沿下列曲线的环量：

(1) $x^2+y^2=R^2,z=0$；　(2) $(x-2)^2+y^2=R^2,z=0$

2. 已知矢量场$\boldsymbol{F}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$试计算沿$l$的环

量。l是由$x=0, x=a, y=0, y=b$所构成的矩形回路。



第2题图

3. 判断下列矢量场$\boldsymbol{a}$在场中任一闭曲线l上的环量是否为零：

(1) $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，

(2) $\boldsymbol{a}=\{b_2z-b_3y, b_3x-b_1z, b_1y-b_2x\}$。($b_1, b_2, b_3$是不同时为零的常数)

4. 一质点在力场$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$的作用下，沿螺旋线$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$运动，求其从$\theta=0$到$\theta=2\pi$时所作的功。

5. 求矢量场$\boldsymbol{a}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$处的旋度，以及在这点沿方向$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的环量面密度。

6. 设矢量场$\boldsymbol{a}=\{x^2+y, 3yz-x^2, zx\}$，过点$M(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$的矢量为$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，求该点处的环量面密度。

7. 若矢量场$\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，求在点$M(1,-1,1)$处的$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$。

8. 求下列各矢量场的旋度：

(1) $\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，

(2) $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{a}=p(x)\boldsymbol{i}+Q(y)\boldsymbol{j}+R(z)\boldsymbol{k}$。

9. 设$\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}-2xz\boldsymbol{j}+2yz\boldsymbol{k}$,求rot rot$\boldsymbol{a}$。

10. 求下列矢量场的旋度

(1)$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$,

(2)$\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$,

(3)$\boldsymbol{a}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$。

11. 证明$\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$,其中$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$。

12. 已知$\boldsymbol{a}=3y\boldsymbol{i}+2z^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=x^2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$,求rot$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

13. 设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$r=|\boldsymbol{r}|$,$\boldsymbol{c}$为常矢。求

(1) rot$[f(r)\boldsymbol{c}]$,(2) div$[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{c}]$

14. 给定矢量场$\boldsymbol{F}=\{ay-bz,-(ax-cz),bx-cy\}$其中$a,b,c$为常数。求

(1) div$\boldsymbol{F}$,(2) rot$\boldsymbol{F}$。

15. 已知$\boldsymbol{a}=\{x^2+y,3yz-x^2,zx\}$,求

(1) 旋度场;(2) 在点$M\left(1,\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$的旋度,以及环量面密度的最大值。

16. 设有点电荷q位于坐标原点,试证明此电场中电位移矢量$\boldsymbol{D}$的旋度为零。

第六章 有势场、管形场和调和场

在研究流体力学、电学等有关学科时，我们经常遇到三种重要的矢量场，这就是有势场、管形场与调和场。下面，我们将对它们的性质作进一步的讨论。

§6.1 有势场

一、有势场与势函数的概念

众所周知，对于在物理学、力学中所遇到的各种力场（如重力场、万有引力场以及静电力场等），人们按其作功与路径有关还是无关的这一性质，通常将力场分为保守力场和非保守力场两类；而且，任何保守力场$\boldsymbol{F}$，都存在着势函数φ，即有

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\varphi$$

并且称存在势函数的力场为有势场（或位场），也就是说，有势场即为保守场。

就一般的矢量场而言，我们给出以下的定义。

定义 对于一已知的矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，如果存在数性函数$u(M)$，满足

$$\boldsymbol{a}(M) = \mathrm{grad}u\text{①} \tag{6-1}$$

则称矢量场$\boldsymbol{a}(M)$为有势场（或位场）。令$v = -u$，且称v为这

①在某些科学领域，例如流体力学中，也常常把适合关系式$a(M) = \mathrm{grad}u$的函数u，直接定义为矢量场$a(M)$的势函数，或者称u为$a(M)$的力函数。由此可见，两种定义（或者势函数与力函数之间）仅相差一个常数。

个场的势函数。由此可见，矢量场$\boldsymbol{a}(M)$与势函数v之间的关系是

$$\boldsymbol{a}(M) = -\mathrm{grad}\,v \qquad (6\text{-}2)$$

从以上的定义可知，有势场是一个梯度场。这里应当注意的是，对于已知的有势场来说，场的势函数实际上有无穷多个，但它们之间只相差一个常数。

事实上，因若v_1，v_2均为矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的势函数，即

$$\boldsymbol{a} = -\mathrm{grad}\,v_1, \quad \boldsymbol{a} = -\mathrm{grad}\,v_2$$

则有

$$\mathrm{grad}\,v_1 = \mathrm{grad}\,v_2$$

亦即

$$\mathrm{grad}(v_1 - v_2) = 0$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(v_1 - v_2) = 0$$

这表明，$v_1 - v_2$与x,y,z无关，从而

$$v_1 - v_2 = C \qquad (C\text{为常数})$$

于是得

$$v_1 = v_2 + C$$

因此，若已知$v(M)$是矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的一个势函数，那末，场的所有势函数的全体就可表示为

$$v(M) + C \qquad (C\text{为任意常数})$$

我们举如下二个例子：

（1）矢量场$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$。不难看出，它是数性函数$u(M) = \frac{r^2}{2}$的梯度场，即$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} = \mathrm{grad}\frac{r^2}{2}$。因此，矢量

场$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$为有势场，而势函数$v=-u=-\frac{r^2}{2}$。

（2）引力场$\boldsymbol{F}(M)=\frac{-m}{r^3}\boldsymbol{r}$。可以看出，$\boldsymbol{F}(M)$
$=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}=\text{grad}\frac{m}{r}$。所以引力场是有势场，势函数$v=-\boldsymbol{u}=$
$-\frac{m}{r}$。

（3）电场强度矢量场$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$。这也是有势场，势函数为$v(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$，因为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}=-\text{grad}\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

二、矢量场是有势场的充要条件

对于一般的矢量场$\boldsymbol{a}(M)$而言，其旋度不一定恒为零，但当$\boldsymbol{a}(M)$恰为某一数量场$u(M)$的梯度时，其旋度一定恒为零。而由上述有关有势场的定义可知，梯度场就是有势场。然而，是否任何矢量场都为有势场呢？对此我们有下面的定理。在证明这个定理之前，为了讨论的需要，先证明如下引理：

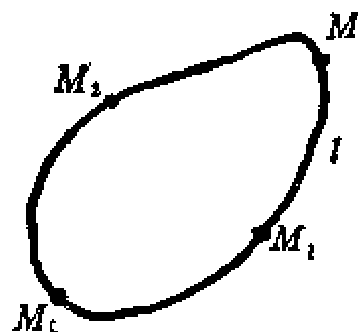


图6-1

引理 在单连通区域Ω中的线积分

$$I=\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (6\text{-}3)$$

与路径无关的充要条件是：沿Ω内任一闭曲线l，恒有

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \qquad (6\text{-}4)$$

证 必要性。设在域Ω内，线积分〔式(6-3)〕与路径无关。而l为Ω中任一闭曲线，将其分为两段(图6-1)：

$$l = \overset{\frown}{M_0M_1M} + \overset{\frown}{MM_2M_0}$$

则必有

$$\int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\overset{\frown}{M_0M_2M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} &= \int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\overset{\frown}{MM_2M_0}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= \int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\overset{\frown}{M_0M_2M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= 0\end{aligned}$$

这样就证明了必要性。

充分性。设于域Ω中任一闭曲线l，恒有

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

由此，设$\overset{\frown}{M_0M_1M}$、$\overset{\frown}{MM_2M_0}$为连接两定点$M_0$、$M$的曲线，它们围成了域$\Omega$中的任一闭合回路$l$（图6-1）。则由

$$\begin{aligned}\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} &= \int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\overset{\frown}{MM_2M_0}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= \int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\overset{\frown}{M_0M_2M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= 0\end{aligned}$$

得到

$$\int_{\overset{\frown}{M_0M_1M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\overset{\frown}{M_0M_2M}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

于是充分性成立。

定理6.1 矢量场$\boldsymbol{a}(M)$在单连域内为有势场的充要条

件，是其旋度在场内处处为零。

证 （1）必要性。设矢量场 $\boldsymbol{a}(M)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，如果 $\boldsymbol{a}(M)$ 为有势场，则存在数性函数 $u(x,y,z)$，满足

$$\boldsymbol{a}(M)=\mathrm{grad}u$$

即有

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad a_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad a_z=\frac{\partial u}{\partial z}$$

从而

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=0$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=0$$

因此，在场内处处有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$$

（2）充分性。设在场中处处有 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$，又由于场所在的区域是单连域，则由斯托克斯公式

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{s}$$

可知，对于场中任一闭曲线 l，都有

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

根据上述的引理，这个事实应等价于曲线积分

$$I=\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

与路径无关。其积分之值，只取决于积分的起点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与终点 $M(x,y,z)$ 的位置；当起点 M_0 一旦固定，它就只是终点 M 的函数，将这一函数记作 $u(x,y,z)$，即

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} a_x dx+a_y dy+a_z dz \quad (6\text{-}5)$$

我们证明，这个函数具有下面的性质：

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad a_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad a_z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

先证其中第一个等式。为此，就要保持终点$M(x,y,z)$的y,z坐标不变，而给x坐标以增量Δx，这样，我们得到一个新的点$N(x+\Delta x,y,z)$。于是有

$$\begin{aligned}\Delta u=u(N)-u(M)&=u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)\\&=\int_{M_0}^{N}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}-\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}\\&=\int_{M}^{N}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}a_xdx+a_ydy+a_zdz\end{aligned}$$

因为积分与路径无关，故最后这个积分可以在直线段MN上取。这时y、z均为常数，从而$dy=0,dz=0$，这样就有

$$\Delta u=\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}a_x(x,y,z)dx$$

按积分中值定理，有

$$\Delta u=a_x(x+\theta\Delta x,y,z)\Delta x\qquad(0<\theta<1)$$

两端以Δx除之，令$\Delta x\to 0$取极限，就得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_x(x,y,z)$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a_y(x,y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=a_z(x,y,z)$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(M)&=a_x(M)\boldsymbol{i}+a_y(M)\boldsymbol{j}+a_z(M)\boldsymbol{k}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\mathrm{grad}\,u=-\mathrm{grad}(-u)\end{aligned}$$

即

$$v(x,y,z)=-u(x,y,z)=-\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{a}(M)\cdot d\boldsymbol{l}$$

就是矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的势函数，于是充分性得证。

这个性质表明：

（1）表达式$a_x dx+a_y dy+a_z dz$是函数u的全微分；

（2）函数u满足$\boldsymbol{a}(M)=\mathrm{grad}u$，所以$\boldsymbol{a}(M)$为有势场。

一般称旋度恒为零的场为无旋场。而对于具有曲线积分$\int_l \boldsymbol{a}(M)\cdot d\boldsymbol{l}$与路径无关的矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，常称为保守场。从上述定理及其证明可以看出，以单连域内：

（1）场有势（梯度场），即存在势函数v，使$\boldsymbol{a}(M)=-\mathrm{grad}v$；

（2）场无旋，即$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$在场中处处成立；

（3）场保守，即线积分$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$与路径无关，故恒有$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0$；

（4）表达式$a_x dx+a_y dy+a_z dz$是某个函数的全微分。

这四种表述是彼此等价的。

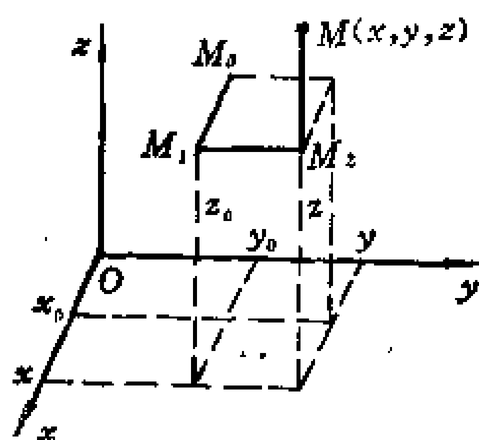


图 6-2

以上不仅证明了$\boldsymbol{a}(M)$的势函数是存在的，而且式（6-5）还给我们提供了计算势函数的途径：由于其中的积分与路径无关，故可选取逐段平行于坐标轴的折线$M_0M_1M_2M$来作为积分路线，其中M_0M_1平行于Ox轴，M_1M_2平行于Oy轴，M_2M平行于Oz轴（图6-2）。于是式（6-5）便成为

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x,y,z_0)dy$$
$$+\int_{z_0}^{z}a_z(x,y,z)dz \qquad (6-6)$$

利用这个公式，就可方便地求出函数$u(x,y,z)$，然后再令$v=-u(x,y,z)$，这样就得到势函数。但因为积分式(6-6)可以取不同的起点，所以势函数不是唯一的，且不难证明它们之间只相差一个常数，因而一般地有：

$$v=-u(x,y,z)+C \quad (C\text{是任意常数})$$

另外，根据以上的讨论，我们可以指出，定理6.1的证明完全适用于平面矢量场。例如，设

$$\boldsymbol{a}(M)=a_x(x,y)\boldsymbol{i}+a_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

是xOy平面上单连域D内的矢量场(图6-3)，则$\boldsymbol{a}(M)$是有势场的充要条件为

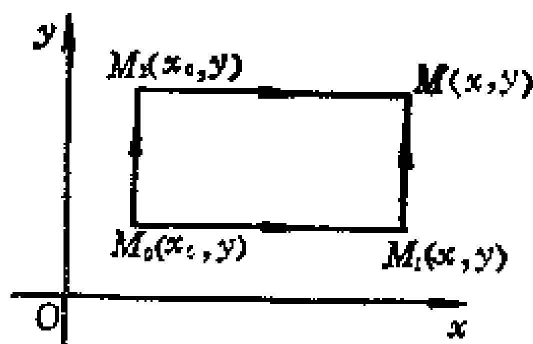


图6-3

$$\frac{\partial a_y(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial a_x(x,y)}{\partial y} \qquad (6-7)$$

当条件式(6-7)成立时，矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的势函数可表示为

$$v=-u(x,y)+C \quad (C\text{是任意常数})$$

式中

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x,y)dy \qquad (6-8)$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}a_x(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}a_y(x_0,y)dy \qquad (6-9)$$

三、计算举例

1. 证明矢量场

$$\boldsymbol{a}(M)=(y\cos xy)\boldsymbol{i}+(x\cos xy)\boldsymbol{j}+\sin z\boldsymbol{k}$$

为有势场，并求其势函数。

证 由于

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y\cos xy & x\cos xy & \sin z\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\sin z-\frac{\partial}{\partial z}(x\cos xy)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}(y\cos xy)-\frac{\partial}{\partial x}\sin z\right]\boldsymbol{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\cos xy-\frac{\partial}{\partial y}(y\cos xy)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

于是由定理6.1可知，矢量场$\boldsymbol{a}(M)$是有势场。

我们应用式(6-6)来求其势函数。为简便起见，取$M_0(x_0,y_0,z_0)$为坐标原点$O(0,0,0)$。否则，求出的势函数也只相差一个常数。依此，有

$$u(x,y,z)=\int_0^x a_x(x,0,0)dx+\int_0^y a_y(x,y,0)dy+\int_0^z a_z(x,y,z)dz$$

$$=0+\int_0^y x\cos xy\,dy+\int_0^z \sin z\,dz$$

$$=\sin xy\Big|_0^y-\cos z\Big|_0^z=\sin xy-\cos z+1$$

于是得到势函数$v=-u=\cos z-\sin xy-1$。而场的势函数的全体则为

$$v=-u+c=\cos z-\sin xy+C_1$$

2. 证明矢量场

$$\boldsymbol{a}(M)=(2xz^3+6y)\boldsymbol{i}+(6x-2yz)\boldsymbol{j}+(3x^2z^2-y^2)\boldsymbol{k}$$

为有势场，并求其势函数。

证 容易算出

$$\text{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2\end{vmatrix}=0$$

故$\boldsymbol{a}(M)$是有势场。

现取$M_0(1,-1,1)$，应用式(6-6)，有

$$u(x,y,z)=\int_1^x a_x(x,-1,1)dx+\int_{-1}^y a_y(x,y,1)\cdot dy+\int_1^z a_z(x,y,z)dz=\int_1^x(2x-6)\cdot dx+\int_{-1}^y(6x-2y)dy+\int_1^z(3x^2z^2-y^2)dz=(x^2-6x)\Big|_1^x+(6xy-y^2)\Big|_{-1}^y+(x^2z^3-y^2z)\Big|_1^z$$

$$=x^2z^3-y^2z+6xy+6$$

所以势函数为

$$v = -u + C = y^2 z - 6xy - x^2 z^3 + C_1$$

3. 设矢量场

$$\boldsymbol{a} = (y^2 + 2xz^2)\boldsymbol{i} + (2xy - z)\boldsymbol{j} + (2x^2 z - y + 2z)\boldsymbol{k}$$

问$\boldsymbol{a}$是否为有势场?若是,求出其势函数。

解

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xz^2 & 2xy - z & 2x^2 z - y + 2z \end{vmatrix}$$

经过计算,$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = 0$,故$\boldsymbol{a}$为有势场。

一般说来,求有势场的势函数v,除了利用公式(6-6),由

$$v = -u = -\Big[\int_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0) \cdot dy + \int_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)dz\Big] + C$$

计算外,还可以用不定积分法。为了说明这种方法,下面就用它来求本例的势函数v。

因为$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = 0$,故存在函数$u$,满足

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 2xz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 z - y + 2z \tag{6-10}$$

对第一个方程积分,得

$$u = xy^2 + x^2 z^2 + f(y, z) \tag{6-11}$$

其中$f(y,z)$为任意可微函数。为了确定它,将上式对y求导,

得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+\frac{\partial f}{\partial y}$$

与式(6-10)的第二个方程比较，有

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-z$$

积分之，得

$$f(y,z)=-yz+g(z)$$

其中$g(z)$为任意可微函数。将上式的$f(y,z)$代入式(6-11)，得

$$u=xy^2+x^2z^2-yz+g(z) \tag{6-12}$$

将上式对z求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2x^2z-y+\frac{\partial g}{\partial z}$$

与式(6-10)的第三个方程比较，得

$$\frac{\partial g}{\partial z}=2z$$

再积分，有

$$g(z)=z^2+C$$

其中C为任意函数。将$g(z)=z^2+C$代入式(6-12)，即得

$$u=xy^2+x^2z^2-yz+z^2+C$$

从而得势函数

$$v=-u=yz-xy^2-x^2z^2-z^2+C_1$$

4. 求电场强度矢量场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$$

的势函数。

解 因为$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0$〔见§5.4，例(5.35)〕，则由定理6.1可知，势函数v存在

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}=-\mathrm{grad}v$$

于是

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}z \tag{6-13}$$

式中第一个方程的积分为

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx=-\int\frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3}dx$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\int\frac{xdx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{q}{8\pi\varepsilon}\int\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+f(y,z)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}+f(y,z) \tag{6-14}$$

其中$f(y,z)$为任意可微函数。将v对y求导，并注意式(6-13)的第二式，有

$$-\frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3}+\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}y$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

由此，$f(y,z)=g(z)$，这里$g(z)$为任意可微函数。将此代入式(6-14)，得

$$v=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}+g(z) \tag{6-15}$$

再将v对z求导，并注意式(6-13)的第三式，有

$$\frac{\partial g}{\partial z}=0$$

于是$g(z)=C$，代入式(6-15)，即得势函数

$$v=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}+C$$

其中C为任意常数。

5. 证明任何保守场都遵从机械能守恒原理。

证 设$\boldsymbol{a}(M)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$是一保守力场，则按定理6.1，它也是位场，即存在力函数$u(x,y,z)$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

根根牛顿第二定律$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，故有

对上列各式的两端依次以$x'(t)$、$y'(t)$、$z'(t)$乘之，然后相加，再对t积分，得

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} m\left[x''(t)x'(t)+y''(t)y'(t)+z''(t)z'(t)\right]dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}u'(t)dt\end{aligned}\tag{6-16}$$

其中$u(t)=u(x(t),y(t),z(t))$。显然，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} m\left[x''(t)x'(t)+y''(t)y'(t)+z''(t)z'(t)\right]dt\\&=\frac{m}{2}\left\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2\right\}\Big|_{t_1}^{t_2}\\&=\frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{2}mv^2\Big|_{t=t_2}-\frac{1}{2}mv^2\Big|_{t=t_1}\\&=T_2-T_1\end{aligned}$$

式中$\frac{1}{2}mv^2$为保守系统的动能。

$$\int_{t_1}^{t_2} u''(t)dt = u(t_2) - u(t_1)$$

而系统的势能$U(t) = -u(t)$。于是，由式(6-16)，得到

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

即一个具有保守力的系统，其动能与势能之和是守恒的。这就是机械能守恒原理。

6. 设$\boldsymbol{a}(M) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$证明存在函数$u(M)$，满足

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B du = u(B) - u(A)$$

或写为

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = u(M)\Big|_A^B 。$$

此时亦称$u(M)$为表达式$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$的原函数。

证 因为$\boldsymbol{a}(M)$是保守场，即为有势场，故存在函数u，满足

$$\boldsymbol{a}(M) = \mathrm{grad}u$$

而且

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathrm{grad}u\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$= du$$

即有

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B du$$

又由式(6-5)，函数u可由公式

$$u(M) = \int_{M_0}^M \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + C \qquad (C\text{为任意常数})$$

给出。因此

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^{M_0} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{M_0}^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \left(\int_{M_0}^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + C\right) - \left(\int_{M_0}^A \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + C\right)$$

$$= u(B) - u(A)$$

显然，这个结果与任意常数C无关。

§6.2 管 形 场

一、管形场与矢量势的概念

定义 设有矢量场$\boldsymbol{a}(M)$，若在其定义域中每一点处都有$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$，则称此矢量场为管形场。换言之，管形场就是无源场。

例如，引力场$\boldsymbol{F}(M) = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}\,(r \neq 0)$，电场强度矢量场$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}\,(r \neq 0)$，在其定义域中都是管形场。

我们之所以称无源场为管形场，是因为它具有如下的特殊性质。

若矢量场$\boldsymbol{a}(M)$为管形场，它所在的空间区域为单连域，在场中任取一个矢量管(即由矢量线所组成的管形曲面)，则矢量场$\boldsymbol{a}(M)$通过矢量管各个横断面的通量是一常数值。

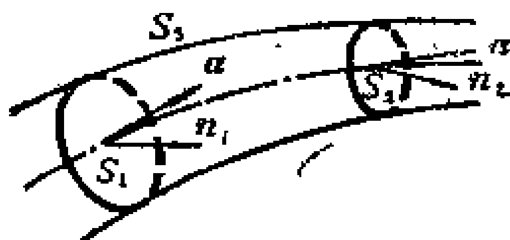


图6-4

如图6-4所示，S_1和S_2为矢量管的任意两个横断面，其法矢量$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$都朝向矢量$\boldsymbol{a}$所指的一侧，S_3是S_1、S_2两横断

面间的一段矢量管的侧面，而S为由S_1、S_2和S_3所组成的一个封闭曲面。根据定义，管形场的散度为零，即$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，这一条件相当于矢量$\boldsymbol{a}(M)$通过任意闭曲面$S$的流量等于零。于是，由高斯公式有

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{a}dV=0$$

即

$$\iint_{S_1} a_n dS+\iint_{S_2} a_n dS+\iint_{S_3} a_n dS=0$$

式中a_n为矢量$\boldsymbol{a}$在闭曲面S上的外向法矢$\boldsymbol{n}$的方向上的投影。由于矢量管的性质，在侧面S_3上每一点处的矢量$\boldsymbol{a}(M)$，都指向该面上矢线的切线方向，因而与S_3上的法矢量正交，所以$a_n=0$（也就是流体不通过管壁外流）。因此，上式成为

$$-\iint_{S_1} A_{n1}\, dS+\iint_{S_2} A_{n2} dS=0$$

即

$$\iint_{S_1} A_{n1}\, dS=\iint_{S_2} A_{n2} dS$$

所以

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$$

这个性质表明，当矢量场为无源场时，穿过同一矢量管的所有横断面的通量都相等，在场内任一点处，矢线既不能产生，也不可能消失。比如，在无源的流速场中，流入某个矢量管的流量和从管内流出的流量是相等的。因此，流体在矢量管内的流动，宛如在真正的管子里流动一样，管形场就是因此得名。

综上所述，在管形场$\boldsymbol{a}(M)$中，由于$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，因而存在矢

量$\boldsymbol{b}(M)$，定义如下：

定义 设$\boldsymbol{a}(M)$是某区域Ω上的矢量场，如果存在Ω上的矢性函数$\boldsymbol{b}(M)$，满足

$$\text{rot}\,\boldsymbol{b}(M)=\nabla\times\boldsymbol{b}(M)=\boldsymbol{a}(M)$$

则称$\boldsymbol{b}(M)$为矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势。

二、矢量场是管形场的充要条件

定理6.2 矢量场$\boldsymbol{a}(M)$为管形场的充要条件，是它为另一矢量场$\boldsymbol{b}(M)$的旋度场。

证 充分性 设$\boldsymbol{a}(M)=\text{rot}\,\boldsymbol{b}(M)$，则由

$$\text{rot}\,\boldsymbol{b}=\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\text{div rot}\,\boldsymbol{b}^{①}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)=0$$

即有

$$\text{div}\,\boldsymbol{a}=0$$

即充分性成立，所以矢量场$\boldsymbol{a}(M)$是管形场。

必要性 假定$\text{div}\,\boldsymbol{a}(M)=0$，现要证明存在矢量场

$$\boldsymbol{b}(M)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

满足

$$\text{rot}\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(M) \tag{6-17}$$

它的分量形式是

---

① 这里须假定$b_x(M)$、$b_y(M)$、$b_z(M)$具有连续的二阶偏导数。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = a_x(M) & (6\text{-}18) \\ \dfrac{\partial b_x}{\partial z} - \dfrac{\partial b_z}{\partial x} = a_y(M) & (6\text{-}19) \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} - \dfrac{\partial b_x}{\partial y} = a_z(M) & (6\text{-}20) \end{cases}$$

显然，为了证明存在满足条件式(6-17)的矢量场$\boldsymbol{b}(M)$，就只须证明方程组式(6-18)，(6-19)，(6-20)有解$b_x(M)$、$b_y(M)$、$b_z(M)$。

为简单起见，我们来求式(6-18)～式(6-20)在满足$b_z(M)\equiv 0$这一条件下的解。

当$b_z(M)\equiv 0$时，式(6-18)～式(6-20)相应变为

$$-\frac{\partial b_y}{\partial z} = a_x(M) \tag{6-21}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} = a_y(M) \tag{6-22}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z(M) \tag{6-23}$$

对式(6-21)、(6-22)进行积分，得

$$b_y(M) = -\int_{z_0}^{z} a_x(M)dz + f(x,y) \tag{6-24}$$

$$b_x(M) = \int_{z_0}^{z} a_y(M)dz + g(x,y) \tag{6-25}$$

这里f与g都是x、y的任意函数。将式(6-24)、(6-25)代入式(6-23)，并利用条件

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0$$

可得

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z(M)$$

即

$$a_z(x,y,z)-a_z(x,y,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=a_z(x,y,z)$$

由此得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=a_z(x,y,z_0) \qquad (6\text{-}26)$$

在上式中，取

$$g(x,y)=0 \qquad (6\text{-}28)$$

然后对x积分，得

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}a_z(x,y,z_0)dx+\omega(y) \qquad (6\text{-}27)$$

其中$\omega(y)$是y的任意函数。再取$\omega(y)=0$，就得出

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}a_z(x,y,z_0)dx \qquad (6\text{-}29)$$

将式(6-28)，(6-29)代入式(6-24)、(6-25)，再与$b_z(M)=0$并列，这样就得到

$$\begin{cases} b_x(M)=\int_{z_0}^{z}a_y(x,y,z)dz \\ b_y(M)=-\int_{z_0}^{z}a_x(x,y,z)dz+\int_{x_0}^{x}a_z(x,y,z_0)dx \\ b_z(M)=0 \end{cases} \qquad (6\text{-}30)$$

根据定义，满足式(6-17)、并以式(6-30)为坐标分量的矢量$\boldsymbol{b}(M)=b_x(M)\boldsymbol{i}+b_y(M)\boldsymbol{j}+b_z(M)\boldsymbol{k}$，就是矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势。

以上证实了矢量势的存在。但需要指出的是，当$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=0$时，$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势并不是唯一的。事实上，从上面的推导过程可以看出，如果我们不取$b_z(M)=0$、$g(x,y)=0$、$\omega(y)=0$，而只将$b_z(M)$、g、ω取为别的合于条件的函数(这完全是可以的)，那么，计算矢量势的公式(6-30)就

将随之而变化。这表明，对于同一个管形场$\boldsymbol{a}(M)$，实际上存在着无穷多个矢量势。

事实上，若$\boldsymbol{b}(M)$是$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势，那么不难验证，矢性函数

$$\boldsymbol{c}(M)=\boldsymbol{b}(M)+\nabla u$$

也是$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势。其中$u(M)$是域Ω上任一具有三阶连续偏导数的函数，而由$u(M)$的任意性，便知$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势有无穷多个。若特别选取$u=u_0$，使

$$\nabla^2 u_0(M)=-\nabla\cdot\boldsymbol{b}(M)$$

时，则矢性函数$\boldsymbol{c}(M)=\boldsymbol{b}(M)+\nabla u_0$不仅是矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的一矢量势，而且

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{c}(M)&=\nabla\cdot[\boldsymbol{b}(M)+\nabla u_0]\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{b}(M)+\nabla^2 u_0(M)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{b}(M)-\nabla\cdot\boldsymbol{b}(M)=0\end{aligned}$$

这一结果可表述为：若$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M)=0$，则存在矢性函数$\boldsymbol{c}(M)$，使

$$\boldsymbol{a}(M)=\nabla\times\boldsymbol{c}(M),\nabla\cdot\boldsymbol{c}(M)=0 \qquad (6\text{-}31)$$

三、连续性方程

我们来考察流体在无源时的运动。假定流体充满着由光滑封闭曲面S所围成的空间区域Ω，其体积为V。以ρ表示流体的密度，$\boldsymbol{v}$表示流速，它们都是位置和时间的函数，即$\rho=\rho(M,t)$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M,t)$。此外，还假定$\rho$和$\boldsymbol{v}$都具有连续偏导数。

在单位时间内，从Ω内流出S的流体质量如果是

$$Q_m=\oiint_S \rho v_n dS$$

那么，由于是无源的运动，则在同一时间内必有同样多的流体流入 Ω 内。若密度 ρ 发生变化，且在 dt 时间内，ρ 的减少为 $-\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$，则体积元素 dV 所含质量 ρdV 的减少就是 $-\frac{\partial\rho}{\partial t}dtdV$，那么，在单位时间内，整个区域$\Omega$中质量的减少应为

$$-\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

根据质量守恒原理，以上两式必须相等，故有

$$\oiint\limits_{S}\rho v_n dS=-\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

即

$$\oiint\limits_{S}\rho v_n dS+\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=0 \tag{6-32}$$

应用高斯公式，将左边的曲面积分换成三重积分，得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]dV=0$$

这个等式对于任何体积V来说都成立，故得恒等式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{6-33}$$

这就是流体力学中可压缩流体的连续性方程，当流体流动时，其密度与速度总要适合这个方程。此外，它在电磁学中也有广泛的应用。

我们还可将连续性方程写成另一形式。因为流体的密度与时间及位置有关：$\rho=\rho(x,y,z,t)$，而位置又随时间而改变，故有

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}v_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}v_z$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}$$

这里$\frac{d\rho}{dt}$是密度ρ在运动中的变化率，而$\frac{\partial\rho}{\partial t}$则表示在某一定点处密度的变化率。移项，得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{d\rho}{dt}-\mathbf{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v} \tag{6-34}$$

又由于

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=\mathbf{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}+\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

将上式与式(6-34)代入式(6-33)，得连续性方程

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{6-35}$$

显然，这是一个与式(6-33)等价的方程。

式(6-35)可写成

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

这表明，散度$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$等于流体在该点的密度的相对改变率。

若流体不可压缩，即$\rho=$常数，于是$\frac{d\rho}{dt}=0$。在这种情况下，连续性方程变成

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{6-36}$$

由此可知，不可压缩流体运动的流速场$\boldsymbol{v}(M)$是一无源场。

四、热传导方程

当导热体内的温度不均匀时，热量便从温度较高处向温度较低处传导。实验表明，热流传递的方向与温度梯度的方向

相反，在dt时间内通过曲面元素dS传递的热量

$$dQ = -k\,\mathrm{grad}_n u\, dS\, dt \tag{6-37}$$

其中，u为温度场，k为物质的导热系数，n为dS的外法矢量。

考虑导热体内任一闭曲面S，它所围区域为Ω，体积为V，则通过S的全部热量为

$$Q = -dt \oiint_S k\,\mathrm{grad}_n u\, dS \tag{6-38}$$

另一方面，热量也可以这样来计算：在dt时间内，若体积元素dV中温度上升du，那么热量应与上升的温度以及单元质量成比例，即

$$C du \cdot \rho dV = C\rho \frac{\partial u}{\partial t} dt dV$$

式中ρ为物质的密度，C为热容量。则整个容积给出的热量为

$$Q = -dt \iiint_\Omega C\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \tag{6-39}$$

在k为常数的条件下，比较式(6-38)、(6-39)，并应用高斯公式，可得

$$\iiint_\Omega C\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \oiint_S k\,\mathrm{grad}_n u\, dS = \iiint_\Omega \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) dV$$

即

$$\iiint_\Omega \left[C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) \right] dV = 0 \tag{6-40}$$

由于V可在导热体内任意取定，故有

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) = 0 \tag{6-41}$$

这就是热传导方程。其中温度u为(x, y, z, t)的函数，若导热体是均匀的，则c, ρ, k为常数，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0 \qquad \left(a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}} \right) \tag{6-42}$$

这是导热系数为常数的热传导方程，它是一种输运方程。

五、 计算举例

例6.1 设矢量场

$$\boldsymbol{F}=(axz+x^2)\boldsymbol{i}+(by+xy^2)\boldsymbol{j}+(z-z^2+cxz$$
$$-2xyz)\boldsymbol{k}$$

试确定a,b,c，使得$\boldsymbol{F}$为一无源场。

解 散度为零的场是无源场。

$$\text{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial Fx}{\partial x}+\frac{\partial Fy}{\partial y}+\frac{\partial Fz}{\partial z}$$
$$=(az+2x)+(b+2xy)+(1-2z+cx$$
$$-2xy)$$
$$=(a-2)z+(2+c)x+b+1$$

要使$\text{div}\boldsymbol{F}=0$，就必须

$$a-2=0,\quad 2+c=0,\quad b+1=0$$

所以

$$a=2$$
$$b=-1$$
$$c=-2$$

例6.2 证明矢量场

$$\boldsymbol{a}(M)=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$$

存在矢量势，并求矢量势。

解 由于

$$\text{div}\boldsymbol{a}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0$$

故矢量场$\boldsymbol{a}(M)$为一管形场，则由定理6.2，$\boldsymbol{a}(M)$的矢量势存在。

设矢量势为

$$\boldsymbol{b}(M) = b_x(M)\boldsymbol{i} + b_y(M)\boldsymbol{j} + b_z(M)\boldsymbol{k}$$

又假定$x_0 = 0, z_0 = 0$，由式(6-30)得

$$b_x(M) = \int_0^z a_y(x,y,z)\,dz = \int_0^z z\,dz = \frac{1}{2}z^2$$

$$b_y(M) = -\int_0^z a_x(x,y,z)\,dz + \int_0^x a_z(x,y,z_0)\,dx$$

$$= -\int_0^z y\,dz + \int_0^x x\,dx = -yz + \frac{1}{2}x^2$$

$$b_z(M) = 0$$

于是所求的矢量势为

$$\boldsymbol{b}(M) = b_x(M)\boldsymbol{i} + b_y(M)\boldsymbol{j} + b_z(M)\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{1}{2}z^2\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - yz\right)\boldsymbol{j}$$

现在进一步求式(6-31)型的矢量势。先解方程

$$\nabla^2 u_0(M) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = -\nabla\cdot\boldsymbol{b}(M) = z$$

显然，

$$u_0(M) = \frac{1}{6}z^3$$

就是方程的一个解。于是

$$\boldsymbol{c}(M) = \boldsymbol{b}(M) + \nabla u_0(M)$$

$$= \frac{1}{2}z^2\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - yz\right)\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}z^2\boldsymbol{k}$$

即为所求的式(6-31)型的矢量势，满足

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{c}(M) = \boldsymbol{a}(M)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{c}(M) = 0\end{cases}$$

例6.3 证明$\boldsymbol{b}(M) = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$为无源场$\boldsymbol{a}(M) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$的矢量势，其中

$$\begin{cases} b_x(M) = \int_{z_0}^{z} a_y(x,y,z)dz - \int_{y_0}^{y} a_z(x,y,z_0)dy \\ b_y(M) = -\int_{z_0}^{z} a_x(x,y,z)dz \\ b_z(M) = C \qquad \text{（}C\text{为任意常数）} \end{cases}$$

并用此公式求矢量场 $\boldsymbol{a}(M) = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ 的矢量势 $\boldsymbol{b}(M)$。

证 $\dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = 0 - [-a_x(x,y,z)] = a_x(x,y,z)$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} = a_y(x,y,z) - 0 = a_y(x,y,z)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_x}{\partial x}dz - \left[\int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_y}{\partial y}dz - a_z(x,y,z_0)\right]$$

$$= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)dz + a_z(x,y,z_0)$$

因为对无源场 $\boldsymbol{a}(M)$，有 $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z} = 0$，故有

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz + a_z(x,y,z_0) = a_z(x,y,z)$$

于是得

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}(M) = \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}(M)$$

所以 $\boldsymbol{b}(M)$ 为矢量场 $\boldsymbol{a}(M)$ 的矢量势。

现在来计算矢量场 $\boldsymbol{a}(M) = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ 的矢量势 $\boldsymbol{b}(M)$。按所给公式，有

$$b_x=\int_{z_0}^{z} z^2 dz-\int_{y_0}^{y} x^2 dy$$
$$=\frac{1}{3}(z^3-z_0{}^3)-x^2(y-y_0)$$

$$b_y=-\int_{z_0}^{z} y^2 dz=-y^2(z-z_0)$$
$$b_z=C \qquad (C\text{为任意常数})$$

由此得到矢量势

$$\boldsymbol{b}(M)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$
$$=\left[\frac{1}{3}(z^3-z_0{}^3)-x^2(y-y_0)\right]\boldsymbol{i}-$$
$$y^2(z-z_0)\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$$

§ 6.3 调 和 场

一、 调和场与调和函数的概念

在上面两节，我们研究了无旋场与无源场的性质；现在我们来讨论一种特殊的场、即无旋、无源场的性质。

1. 调和场

定义 设$\boldsymbol{a}(M)$是在区域Ω上分布的矢量场，如果在Ω中恒有$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=0$与$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$，则称此矢量场$\boldsymbol{a}(M)$为调和场。简言之，调和场就是一个既无源又无旋的矢量场。

例如，在原点的点电荷q所产生的静电场中，除去点电荷所在的原点外，电场强度矢量$\boldsymbol{E}$就形成一个调和场。因为由第五章例5.26知有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\mathrm{div}\left(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0 \qquad (\varepsilon\text{为介电常数})$$

同时由第五章例5.35，知有

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=\text{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\text{rot}\,\boldsymbol{D}=0$$

这个式子还表明，场中存在势函数v，满足

$$\boldsymbol{E}=-\text{grad}v$$

事实上，由本章§6.1的三段第4题可知，电场的电位函数

$$v=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

即为满足上式的势函数。

2. 调和函数　如果矢量场$\boldsymbol{a}(M)$是一个调和场，则按定义有$\text{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$，从而$\boldsymbol{a}(M)$为有势场，存在函数$u$满足$\boldsymbol{a}(M)=\text{grad}u$；又按定义有$\text{div}\boldsymbol{a}(M)=0$，因而有

$$\text{div grad}u^{①}=0$$

即

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{6-43}$$

这是一个二阶线性偏微分方程，叫做拉普拉斯方程（又称调和方程）。因此

定义　凡满足拉普拉斯方程的函数，叫做调和函数。

利用拉普拉斯算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6-44}$$

它与哈密顿算子∇的关系是

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2 \tag{6-45}$$

于是，式(6-43)，可写成

$$\Delta u=0 \tag{6-46}$$

其中的Δu也叫做调和量。

---

① 假定$u(M)$具有二阶连续偏导数。

不难看出，拉普拉斯算子Δ是一个数性微分算子，它可以作用于数性函数，也可以作用于矢性函数。前者如式(6-46)所示，后者可由第五章式(5-64)得出：

$$\Delta \boldsymbol{a} = \nabla^2 \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a})$$

我们知道，飞机在飞行时若速度不太大，气流一般不会发生漩涡，也就是无旋的。此外空气的密度可以认为是常数，这表明气流是不可压缩的，因而流速矢量$\boldsymbol{v}$应满足连续性方程

$$\text{div}\boldsymbol{v} = 0$$

同时，由于运动是无旋的，则$\boldsymbol{v}$又是有势场，于是有

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}u$$

这样，流速矢量的势函数$\varphi(= -u)$满足拉普拉斯方程

$$\text{div grad}\varphi = 0$$

由此可知，不可压缩无旋运动的势函数φ是调和函数。

二、矢量场是调和场的充要条件

定理6.3 矢量场$\boldsymbol{a}(M)$在单连域内是调和场的充要条件是，存在调和函数$u(M)$，满足

$$\boldsymbol{a}(M) = \text{grad}u \tag{6-47}$$

证 必要性。设$\boldsymbol{a}(M)$是一调和场，即恒有

$$\text{rot}\boldsymbol{a}(M) = 0 \tag{6-48}$$

$$\text{div}\boldsymbol{a}(M) = 0 \tag{6-49}$$

则由定理6.1及式(6-48)可知，$\boldsymbol{a}(M)$为有势场，即存在势函数$v(M)$，满足

$$\boldsymbol{a}(M) = -\text{grad}v$$

令$u(M) = -v(M)$，上式即成为

$$\boldsymbol{a}(M) = \text{grad}u$$

将这一结果代入式(6-49)，即得

$$\text{div}\,\boldsymbol{a}(M)=\text{div}\,\text{grad}u=\nabla^2u=\Delta u=0$$

这表明，$u(M)$是调和函数，式(6-47)成立。

充分性。如果存在调和函数$u(M)$，满足

$$\boldsymbol{a}(M)=\text{grad}u$$

则由这一条件以及调和函数$u(M)$的定义，有

$$\text{rot}\,\boldsymbol{a}(M)=\text{rot}\,\text{grad}u=0$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{a}(M)=\text{div}\,\text{grad}u=\nabla^2u=0$$

从而证明了$\boldsymbol{a}(M)$是一调和场，即充分性成立。

三、 平面调和场

平面调和场是指既无源、又无旋的平面矢量场。从调和场的概念来看，它与空间调和场完全类似，但和空间调和场相比，它却具有一些特殊的性质。作为例子，下面我们来讨论平面调和场。

1. 平面场的散度和旋度

所谓平面场，是指这样的场，在场中所有的矢量都平行于一个固定的平面Π，并且在垂直于平面Π的任一直线上，每一点的矢量都相等。对于这样的场，只要知道场在其中一个平面上的情况，也就知道了场在整个空间里的情况，因此，这样的场完全可以用平面Π上的矢量所成的场来表达。当然，这时在讲到平面场的一个点时，应理解为是通过这一点与平面Π垂直的直线；而讲到平面上的一个区域，则是指以这区域为正交截面的一个柱体。

通常就把Π平面作为xOy平面，在其上，平面场$\boldsymbol{a}(M)$则取$\{P,Q,0\}$的形式，而且P，Q与Z无关，即有

$$\boldsymbol{a}(M)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j} \tag{6-50}$$

则

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y} \tag{6-51}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(M)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{6-52}$$

2. 平面调和场的性质

设$\boldsymbol{a}(M)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$为$xOy$平面上单连域$D$上的调和场。

1) 由于$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(M)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0$,即

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{6-53}$$

则存在势函数$v(M)$满足$\boldsymbol{a}(M)=-\mathrm{grad}\,v$,于是得

$$P=-\frac{\partial v}{\partial x},\qquad Q=-\frac{\partial v}{\partial y} \tag{6-54}$$

其中的势函数v,可参照式(6-8),用如下的积分求出:

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy \tag{6-55}$$

2) 由于$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M)=0$,则按式(6-51)有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \tag{6-56}$$

将此式与式(6-53)比较,不难看出,存在以$-Q$和P为坐标分量的矢量$\boldsymbol{b}(M)$,即

$$\boldsymbol{b}(M)=-Q\boldsymbol{i}+P\boldsymbol{j}$$

它的旋度

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0$$

因此 $\boldsymbol{b}(M)$ 也是平面有势场,存在着函数 u,满足 $\boldsymbol{b}(M)=\mathrm{grad}\,u$,即有

$$-Q=\frac{\partial u}{\partial x},\quad P=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{6-57}$$

函数$u(M)$称为平面调和场$\boldsymbol{a}(M)$的力函数①，可由下式求出[参照式(6-6)]：

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}P(x,y)dy \quad (6-58)$$

3) 比较式(6-54)与(6-57)，得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6-59)$$

这是力函数u与势函数v之间的重要关系式。假定u，v均具有二阶连续偏导数，则由上式可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad (6-60)$$

这两个都是二维拉普拉斯方程。由此可见，函数u和v均为满足二维拉普拉斯方程的调和函数，而且它们还由方程(6-59)相联系。

定义 满足条件(6-59)②的调和函数$u(x,y)$及$v(x,y)$，称为共轭调和函数。

条件式(6-59)称为共轭调和条件，利用这个条件，就能从调和函数之一，求出与之共轭的另一调和函数。

4) 对于力函数$u(x,y)$来说，其等值线

$$u(x,y)=C \quad (6-61)$$

相应地称为场的力线，而沿$u(x,y)=C$，有

$$du(x,y)=-Qdx+Pdy=0$$

---

① 在流体力学中，与势函数$v(x,y)$共轭的调和函数$u(x,y)$，也称为流函数，而其等值线$u(x,y)=c$，相应地称为场的流线。

② 在复变函数论中，函数$f(x+iy)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$为某区域内解析函数的充要条件是：$f$在该区域内可微，且处处满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$。由此可知，解析函数$f$的实部$\varphi(x,y)$和虚部$\psi(x,y)$是共轭调和函数。因此，条件(6-59)就相当于上述的柯西-黎曼条件。

改写成

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q} \tag{6-62}$$

由此可知，沿$v=$常数，在场中任一点处，力线的切线方向与矢量场$\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$的方向一致，

势函数$v(x,y)$的等值线

$$v(x,y)=C \tag{6-63}$$

称为等势线。沿等势线$v(x,y)=C$，有

$$dv(x,y)=-Pdx-Qdy=0$$

由此得

$$\frac{dx}{-Q}=\frac{dy}{P} \tag{6-64}$$

即沿$u=$常数，其切线方向与矢量场$\boldsymbol{a}(M)$的方向垂直，这说明等势线与力线彼此正交。

四、 格林第一、第二公式

根据梯度和散度的运算性质，从高斯公式

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,dV$$

出发，可以导出格林(Green)第一、第二公式。

为此，设$u=u(x,y,z)$、$v=v(x,y,z)$是数量场，Ω是由闭曲面S所围成的三维区域，u、v在Ω及S上有一阶连续偏导数，而在Ω内有二阶连续偏导数，$\boldsymbol{n}^0$为S外法线单位矢量。

于是，由梯度的性质1，有

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\mathrm{grad}\,v\cdot\boldsymbol{n}^0$$

则

$$u\frac{\partial v}{\partial n}=u\,\mathrm{grad}\,v\cdot\boldsymbol{n}^0$$

令

$$\boldsymbol{a} = u\,\mathrm{grad}\,v$$

从而

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} = u\,\mathrm{grad}\,v\cdot\boldsymbol{n}^0 dS = u\frac{\partial v}{\partial n}dS$$

又由散度运算基本公式(5-43)，得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,v) = u\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,v + \mathrm{grad}\,v\cdot\mathrm{grad}\,u$$
$$= u\nabla^2 v + \nabla v\cdot\nabla u$$

将以上结果代入高斯公式，得出

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iiint_\Omega (u\nabla^2 v + \nabla v\cdot\nabla u)dV \qquad (6\text{-}65)$$

此式称为格林第一公式。

在上式中，交换u与v的位置，又有

$$\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_\Omega (v\nabla^2 u + \nabla u\cdot\nabla v)dV \qquad (6\text{-}65a)$$

(6-65)－(6-65a)，得

$$\oiint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \iiint_\Omega (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dV \qquad (6\text{-}66)$$

此式称为格林第二公式。

特别是，当$v = 1$时，有

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_\Omega \nabla^2 u\,dV \qquad (6\text{-}67)$$

格林第一、第二公式是高斯公式的两种转化形式，表述了数量场u、v之间的微分与积分关系，为实际应用提供了方便。

五、 计算举例

1. 设$u = u(x, y, z)$是满足$\nabla^2 u = 0$的数量场，$\boldsymbol{n}^0$为闭曲面S外法线单位矢量，如果在S上，$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$。试证由$S$所围的区

域Ω内，$u=C$（C为常数）。

证　在式（6-65）中取$u=v$，则

$$\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_\Omega(u\nabla^2u+\nabla u\cdot\nabla u)dV$$

$$=\iiint_\Omega(\nabla f)^2dV=0\quad(\because\nabla^2u=\nabla^2v=0)$$

从而，在Ω内必有

$$\nabla u=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

所以得

$$u=C$$

2．验证矢量场

$$\boldsymbol{a}(M)=(2x+y)\boldsymbol{i}+(4y+x+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$$

为调和场，并求出调和函数。

解　按题设有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=\frac{\partial(2x+y)}{\partial x}+\frac{\partial(4y+x+2z)}{\partial y}+\frac{\partial(2y-6z)}{\partial z}$$

$$=2+4-6=0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\2x+y&4y+x+2z&2y-6z\end{vmatrix}$$

$$=0$$

因此$\boldsymbol{a}(M)$是调和场。

设所求的调和函数是u,则有

$$\boldsymbol{a}(M)=\mathbf{grad}u$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=4y+x+2z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2y-6z$$

而且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2+4-6=0$$

即满足拉普拉斯方程,故所求的u是调和函数。由于

$$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\&=(2x+y)dx+(4y+x+2z)dy+(2y-6z)dz\\&=dx^2+ydx+2dy^2+xdy+2zdy+2ydz-3dz^2\\&=d(x^2+2y^2-3z^2)+d(xy)+2d(yz)\\&=d(x^2+2y^2-3z^2+xy+2yz)\end{aligned}$$

由此得

$$u=x^2+2y^2-3z^2+xy+2yz+C$$

3. 设调和函数$u=y^3-3x^2y$,求其共轭调和函数v。

解 由共轭调和条件[式(6-59)],有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$$

则

$$v=\int(-3y^2+3x^2)dx=-3xy^2+x^3+\varphi(y) \qquad (6\text{-}68)$$

式中$\varphi(y)$为待定的函数,为了确定$\varphi(y)$,可将式(6-68)对y求导,得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy+\varphi'(y) \qquad (6\text{-}69)$$

又由于

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy$$

与式(6-69)比较，可知 $\varphi'(y)=0$，因而 $\varphi(x)=C$，代入式(6-68)，即得出共轭调和函数

$$v=-3xy^2+x^3+C \qquad (C\text{为任意常数})$$

3. 已知平面调和场的流函数

$$u=x^2-y^2+xy$$

求场的势函数 v 及场矢量 $\boldsymbol{a}(M)$。

解 由式(6-58)，

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}P(x,y)dy$$

有

$$Q=-\frac{\partial u}{\partial x}=-2x-y$$

$$P=\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$$

则得场矢量

$$\boldsymbol{a}(M)=(x-2y)\boldsymbol{i}+(-2x-y)\boldsymbol{j}$$

由此以及式(6-55)，得

$$v=-\int_{x_0}^{x}(x-2y_0)dx-\int_{y_0}^{y}(-2x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+2xy-2x_0y_0+\frac{1}{2}(x_0{}^2-y_0{}^2)$$

所以势函数

$$v=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+2xy+C$$

4. 证明矢量场

$$\boldsymbol{a}(M)=-2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}$$

为平面调和场，并求场的势函数与流函数。

解 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}=\frac{\partial(-2y)}{\partial x}+\frac{\partial(-2x)}{\partial y}=0$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\left[\frac{\partial(-2x)}{\partial x}-\frac{\partial(-2y)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}=0$$

所以$\boldsymbol{a}(M)$为平面调和场。

$\boldsymbol{a}(M)$的势函数，由式(6-55)，有

$$\begin{aligned}v&=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy\\&=\int_{x_0}^{x}2y_0dx+\int_{y_0}^{y}2xdy\\&=2y_0(x-x_0)+2x(y-y_0)=2xy-2x_0y_0\end{aligned}$$

故得

$$v=2xy+C$$

$\boldsymbol{a}(M)$的流函数，由式(6-58)，有

$$\begin{aligned}u&=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}P(x,y)dy\\&=\int_{x_0}^{x}2xdx-\int_{y_0}^{y}2ydy\\&=(x^2-y^2)-(x_0{}^2-y_0{}^2)\end{aligned}$$

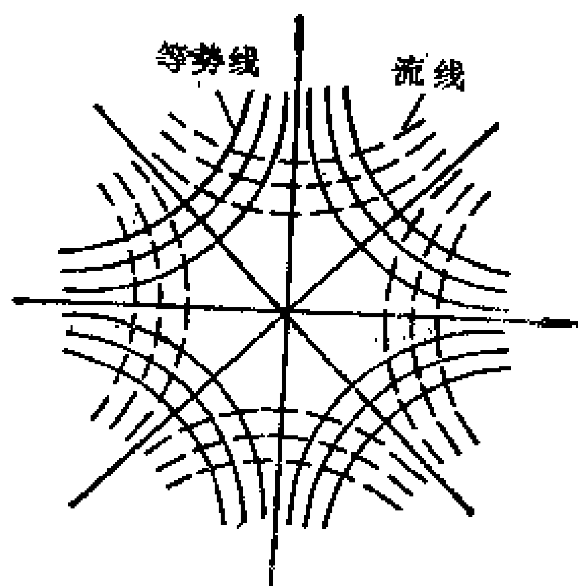


图 6-5

所以

$$u=x^2-y^2+C$$

分别令u和v等于常数，

就得到

流线方程 $x^2-y^2=C_1$

等势线方程 $xy=C_2$ （C_1，C_2为任意常数）

如图 6-5 所示，两者均为等边双曲线族，但对称轴相差 $\pi/4$，其中流线的对称轴是x轴和y轴，而等势线的坐标轴作为渐近线，其对称轴则是直线$x=y$与$x=-y$。

§6.4 场的分类与场的确定性

一、场的分类

在前一章我们引入了有关场的概念。并且按照数学表现形式的不同，将场分为数量场和矢量场两类。对于数量场，我们用数性函数$u(x,y,z)$来描述场中每一点的物理现象；对于矢量场，则用矢性函数$\boldsymbol{a}(x,y,z)$来表征。在以上诸节，我们又讨论了三种重要的矢量场，即有势场，管形场以及调和场，它们都具有明确的物理意义，在电学、流体力学等领域中有着广泛的应用。

我们知道，散度是矢量的数性导数，旋度是矢量的矢性导数，它们都能描述矢量场的特征。因此，对于任一矢量场 $\boldsymbol{a}(M)$，还可以按照散度和旋度的特性，对场作如下的分类：

1. $\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$

显然，这就是我们在上一节讨论过的调和场。场无旋必定有势，而由于

$$\mathrm{rot}(M)=0$$

故 $\boldsymbol{a}(M)$存在势函数v，即

$$\boldsymbol{a}(M)=-\mathrm{grad}v$$

从而有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=-\operatorname{div}\operatorname{grad}v=-\nabla^2 v=0$$

因此，调和场可以由数性函数v来描述，而v满足拉普拉斯方程（图6-6）。

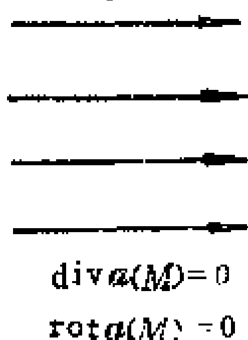


图 6 - 6

2. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)\neq 0,\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$

这是有源无旋场。由 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=0$可知存在 v，使

$$\boldsymbol{a}(M)=-\operatorname{grad}v$$

令$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=\varphi$，则有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=-\operatorname{div}\operatorname{grad}v=\varphi$$

即

$$\nabla^2 v=-\varphi①$$

故这样的场也可由数性函数v来描述，且函数v满足泊松方程（图6-7）。

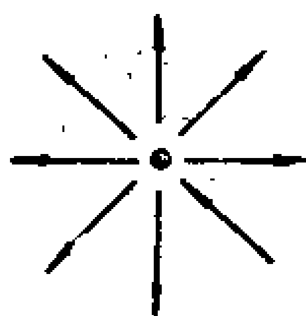


图 6 - 7

3. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)\neq 0$

这是无源有旋场。根据本章定理6.2以及

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=0$$

可知，必存在另一矢性函数$\boldsymbol{b}(M)$，满足

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{b}(M)=\boldsymbol{a}(M),\ \operatorname{div}\boldsymbol{b}(M)=0$$

令$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\boldsymbol{c}(M)$，则

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}(M)=\boldsymbol{c}(M)$$

而由第五章式(5-64)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}(M)=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{b}(M)-\nabla^2\boldsymbol{b}$$

从而得

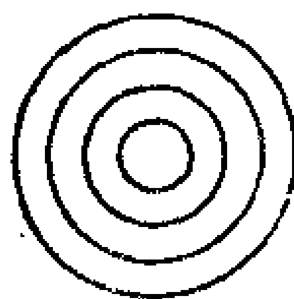
---

① 这种形式的方程称为泊松(Poisson)方程，是一个二阶偏微分方程。当$\varphi=0$时，有$\nabla^2\varphi=0$，即成为拉普拉斯方程。

$$-\nabla^2 \boldsymbol{b}(M) = \boldsymbol{c}(M)$$

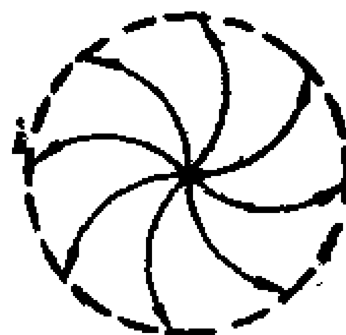
在这种情况下，场$\boldsymbol{a}(M)$可用另一矢性函数$\boldsymbol{b}(M)$来描述，且$\boldsymbol{b}(M)$也满足泊松方程(图6-8)。

4. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M) \neq 0$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(M) \neq 0$



$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M) = 0$
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(M) \neq 0$

图 6－8



$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M) \neq 0$
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}(M) \neq 0$

图 6－9

表 6－1　　　积分关系

高斯公式：	$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,dV$
斯托克斯公式：	$\oint_l \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}$

表 6－2　　　微分关系

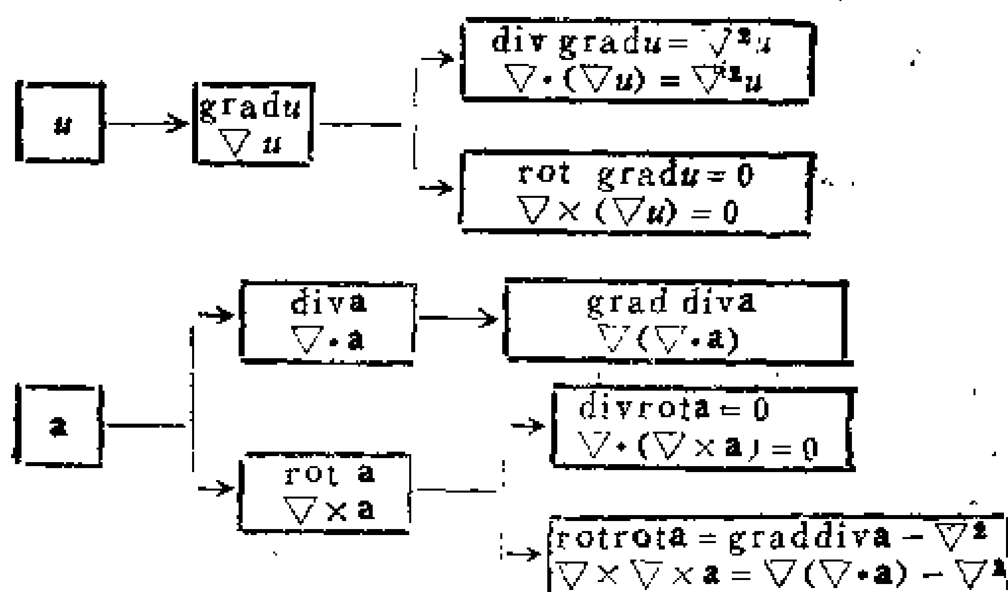
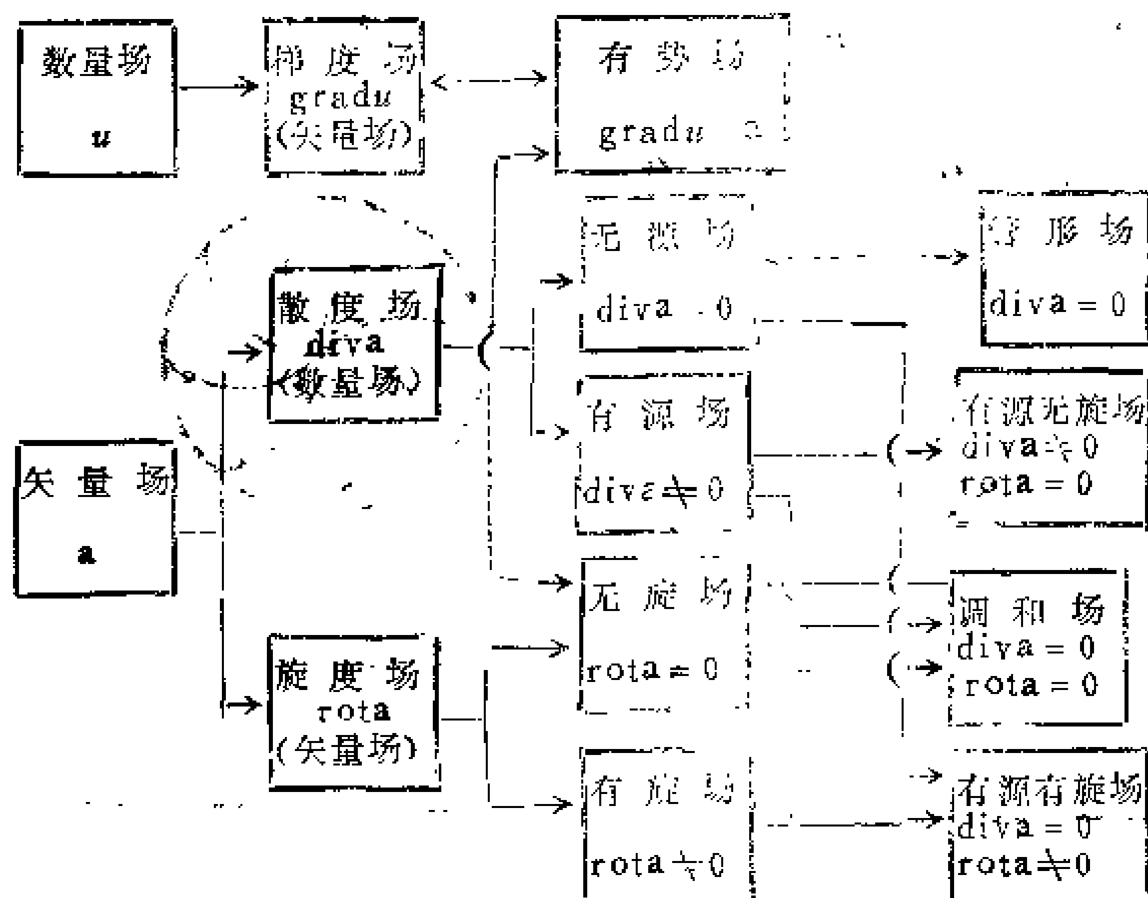


表6-3　　场的分类



这是最一般的矢量场(图6-9)

下面分别给出场的积分、微分关系和分类表。(记号"→"表示由某个场产生其他的场;"←-→"表示等价)

二、　场的确定性问题

由以上的讨论可知，在一般的条件下，数量场存在梯度，矢量场存在散度和旋度。那么，梯度、散度和旋度是否能唯一确定产生它们的场呢?下面我们就来研究这个问题。

1. 对于数量场，有以下的定理:

定理6.4　任何数量场均可由其梯度场以及数量场在某一定点的值来唯一确定。

证　设$u_1(M)$、$u_2(M)$是两个数量场，在区域Ω上满足条件

1）$\mathrm{grad}u_1=\mathrm{grad}u_2$

2）在某一定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，有

$$u_1(x_0,y_0,z_0)=u_2(x_0,y_0,z_0)$$

于是由 1)得到

$$\mathrm{grad}u_1-\mathrm{grad}u_2=\nabla(u_1-u_2)=\mathbf{0}$$

即

$$\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial z}=0$$

由此以及微分中值定理，可以证明，在域Ω上恒有

$$u_1(M)-u_2(M)=C\qquad (C\text{为常数})$$

由此可得

$$C=u_1(x_0,y_0,z_0)-u_2(x_0,y_0,z_0)=0$$

则

$$u_1(M)-u_2(M)=0$$

所以

$$u_1(M)=u_2(M)$$

定理得证。

2．对于矢量场，则有

定理6.5　任一矢量场$\boldsymbol{a}$由散度场$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$、旋度场$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$以及边值条件所唯一确定。

证　设两矢量场$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$，且有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}_1=\mathrm{div}\boldsymbol{a}_2,\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{a}_1=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}_2$$

而在围成区域Ω的闭曲面S的法矢量$\boldsymbol{n}$方向上的投影相等，即有$(\boldsymbol{a}_1)_n=(\boldsymbol{a}_2)_n$　　（边值条件）

令

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$$

则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\boldsymbol{a}_1-\mathrm{div}\boldsymbol{a}_2=0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}_1-\mathrm{rot}\boldsymbol{a}_2=0$$

$$(\boldsymbol{a})_n=(\boldsymbol{a}_1)_n-(\boldsymbol{a}_2)_n=0$$

因而$\boldsymbol{a}$为有势场，设势函数是v，即有

$$\boldsymbol{a}=-\mathrm{grad}v$$

于是$\nabla^2 v=0$，容易看出，v在$\boldsymbol{n}$方向上的方向导数$\frac{\partial v}{\partial n}=(\mathrm{grad}v)_n$，故$\frac{\partial v}{\partial n}=(\boldsymbol{a})_n=0$。由格林第一公式[即式(6-65)]，有

$$\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}v)^2dV=0$$

所以

$$\boldsymbol{a}=-\mathrm{grad}v=0$$

由此可见，在一定的条件下，由散度场和旋度场就能唯一地确定一个矢量场。

习　题

1. 证明矢量场$\boldsymbol{a}(M)=(2x\cos y-y^2\sin x)\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\boldsymbol{j}$为有势场，并求其势函数。

2. 验明矢量场$\boldsymbol{a}_1=(2x+z^2)\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+(y+2xz)\boldsymbol{k}$有一势函数，而$\boldsymbol{a}_2=(2y+x^2)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+(z+2xy)\boldsymbol{k}$没有势函数。求一数性函数$u(M)$，使得$\boldsymbol{a}_1=\mathrm{grad}u$。

3. 下列矢量场是否为有势场，若为有势场，求出其势函数：

(1) $\boldsymbol{a}_1=\{yz,zx,xy\}$，

（2） $\boldsymbol{a}_2=\left\{\frac{1}{2}z^2+y^2,\ 3x+zy,\ 2xy+5\right\}$。

4．试证不论 l 为何种简单曲线，都有 $\oint_l 2xzdx+2yz^2dy+(x^2+2y^2z-1)dz=0$。

5．求下列全微分的原函数 u：

（1） $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$，

（2） $du=(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy$。

6．证明矢量场 $\boldsymbol{a}(M)=(2xy+3)\boldsymbol{i}+(x^2-4z)\boldsymbol{j}-4y\boldsymbol{k}$ 为保守场，并计算曲线积分 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$，其中 l 是从 $M_1(3,-1,2)$ 到 $M_2(2,1,-1)$ 的任意路径。

7．证明下列平面矢量场为有势场，并求其势函数：

（1） $\boldsymbol{a}(M)=xy\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}x^2\boldsymbol{j}$，

（2） $\boldsymbol{a}(M)=(x+y)\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}$。

8．证明矢量场 $\boldsymbol{a}(M)=2xz\boldsymbol{i}+2yz^2\boldsymbol{j}+(x^2+2y^2z-1)\boldsymbol{k}$ 为有势场，并求其势函数。

9．已知函数 f 适合 $\frac{\partial f}{\partial z}=0$，且当 $x=y=0$ 时，$f=0$，求 f，使得矢量场 $\boldsymbol{a}=\{x^3+3y^2z,6xyz,f\}$ 具有势函数 v，求出 v 来。再就此 v，阐明 $\boldsymbol{a}$ 不是管形场。[提示：利用 $\text{rot}\,\boldsymbol{a}=0$ 求 f]

10．证明 $\boldsymbol{b}=U\boldsymbol{i}+V\boldsymbol{j}+W\boldsymbol{k}$ 为无源场 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的矢量势，其中

$$U=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,dz-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)dy$$

$$V=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)dz$$

$$W=C \qquad (C\text{为任意常数})$$

并用此公式求矢量场 $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ 的矢量势。

11. 验证$\boldsymbol{a}=-6xy\boldsymbol{i}+(3y^2-3x^2)\boldsymbol{j}$为调和场，并求共轭调和函数。

12. 已知矢量场$\boldsymbol{a}=\{1+2x-5y, 4y-5x+7z, -6z+7y\}$，验明$\boldsymbol{a}$是否为调和场。若是，求其势函数。

13. 已知调和场的流函数$u=2(x-1)y$，求场矢量$\boldsymbol{a}$及势函数v。

14. 设$v=xy$是一调和函数，求它的共轭调和函数u。

15. 证明矢量场$\boldsymbol{a}(M)=(2x+y)\boldsymbol{i}+(4y+x+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$是调和场，并求其调和函数。

16. 已知平面调和场的势函数$v=2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2$，求场的力函数$u$及场矢量$\boldsymbol{a}(M)$。

第七章　正交曲线坐标系

场论中的梯度、散度、旋度以及调和量$\nabla^2 u$，其概念都是与坐标系无关的，它们各自具有完全确定的物理意义，这反映了它们的客观性。但在解决有关的具体问题时，对这些量的计算，则总是在选取一定的坐标系情况下进行的。由于空间直角坐标系是最常用最基本的坐标系，因而在前面几章，我们讨论并建立了梯度、散度、旋度等在直角坐标系中的计算方法与表达式。然而，在许多问题中，采用直角坐标系并不总是方便的，有时会导致计算复杂化，而应用正交曲线坐标系，往往可以简化我们所研究的问题。例如，一个球对称的静电场，其电势仅仅是一个变量，即该点至球心距离 r 的函数。如果引入一个坐标系，它的一个坐标就是 r，若再计及从球心指向该点的方向，因而也就表征它的场强。这样，求梯度、散度、旋度等的计算就简便得多，而不必象在直角坐标系中那样去求三项的微分。为此，这一章我们引入正交曲线坐标系，并且导出梯度、散度、旋度以及调和量在柱、球坐标系中的表达式。

§ 7.1　正交曲线坐标系

一、正交曲线坐标的概念

以下我们引入一个新的坐标系。它与直角坐标系的关系由下式表出：

$$
\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} \tag{7-1}
$$

这里假定q_1、q_2、q_3都是空间点的单值函数，且具有连续一阶偏导数，于是即可唯一地解出

$$
\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{7-2}
$$

我们知道，空间一点M对应着一矢径$\boldsymbol{r}$，即对应着三个数x、y、z，于是由式(7-1)，就唯一地确定出三个有序数q_1、q_2、q_3；反之，若已知三个有序数q_1、q_2、q_3，则可从式(7-2)唯一地确定出三个数x、y、z，从而完全确定空间一点M。因此，q_1、q_2、q_3与空间点之间是一一对应的。

q_1、q_2、q_3称为空间点的曲线坐标。

显然，三个方程

$$q_1(x、y、z) = C_1, q_2(x、y、z) = C_2, q_3(x、y、z) = C_3$$

(其中C_1、C_2、C_3为常数)分别表示q_1、q_2、q_3的等值曲面，称为坐标曲面。由于q_1、q_2、q_3是单值函数，所以过空间一点M，这三族坐标曲面中各有一个且只有一个曲面经过该点。

这三族坐标曲面之间，两两相交成的曲线，称为坐标曲线。在由坐标曲面$q_2(x、y, z) = C_2$与$q_3(x、y、z) = C_3$ 相交而成的坐标曲线上，由于q_2、q_3 分别保持为常数 C_2、C_3，只有q_1在改变，因之称此曲线为坐标曲线q_1。同理，由

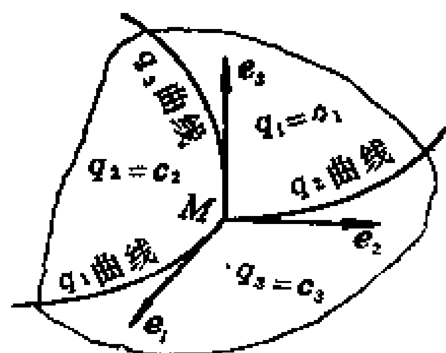


图7-1

$$q_3(x, y, z) = C_3$$

与
$$q_1(x,y,z)=C_1$$
以及
$$q_1(x,y,z)=C_1 \text{与} q_2(x,y,z)=C_2$$
相交而成的曲线，顺次称为坐标曲线 q_2 和坐标曲线 q_3（图7-1）。由此可见，在每一条坐标曲线上，x,y,z只是q_1、q_2、q_3之中一个变量的函数；而在每一坐标曲面上，x、y、z只是q_1、q_2、q_3 之中两个变量的函数。比如在坐标曲线 q_1 上，有$x=x(q_1,C_2,C_3)$，即x只是q_1的函数；而在坐标曲面$q_1=C_1$上，有$x=x(C_1,q_2,q_3)$，所以x只是q_2、q_3的函数。这样，空间一点M都是三个坐标曲面或三条坐标曲线的交点。

我们假定，在空间任一点M处，这些坐标曲线相互正交，也就是三坐标曲线在交点处的切线两两垂直。显然，在这种情况下，各坐标曲面也相互正交，即它们在相交点处的法线两两垂直。这样的坐标系就称为正交曲线坐标系。

另外，我们用$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$分别表示各坐标曲线在点M处的单位切矢量，称为基本单位矢量，其正向分别指向曲线坐标q_1、q_2、q_3增加的一侧。且假定$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$，即各坐标曲线$q_1$，$q_2$，$q_3$构成右手系（图7-1）。对比笛卡儿直角坐标系和正交曲线坐标系可以看出，虽然后者的基本单位矢量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$也是彼此正交；然而，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$的方向则随空间点M的不同位置而改变，这是曲线坐标系与普通直角坐标系的根本区别。

有了基本单位矢量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$后，在空间一点M处的任一矢量$\boldsymbol{a}$，就可以表示为
$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{7-3}$$
其中a_1、a_2、a_3依次是矢量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$方向上的投影。

在正交曲线坐标系中，一般最常用的是柱面坐标系和球面坐标系。

二、柱面坐标系

空间一点M，其柱面坐标是这样的三个数(ρ,φ,z)，其中ρ是点M到Oz轴的距离；φ是过点M且以Oz轴为界的半平面与xOz平面之间的夹角；而z就是点M在直角坐标(x, y, z)中的z坐标（图7-2）。容易看出，M点的直角坐标与柱面坐标（除原点外）的对应关系为

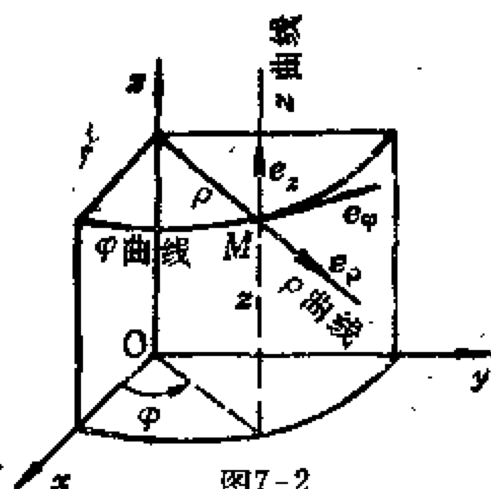


图7-2

$$
\begin{cases}
x=\rho\cos\varphi\\
y=\rho\sin\varphi\\
z=z
\end{cases}
\qquad (7\text{-}4)
$$

即有

$$
\begin{cases}
\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\
\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\\
z=z
\end{cases}
\qquad (7\text{-}5)
$$

其中ρ、φ、z的变化范围是

$$0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty$$

在柱面坐标系中，三坐标曲面是

$\rho=$常数，即以Oz轴为轴的圆柱面；

$\varphi=$常数，即以Oz轴为界的半平面；

$z=$常数，即与xOy平面平行的平面。

三坐标曲线是

ρ曲线，即起点在Oz轴，且与xOy面平行的射线；

φ曲线，即圆心在Oz轴，且与xOy面平行的圆周；

z曲线，即与Oz轴平行的直线。

如上所述，各坐标曲线在空间一点M处是正交的。其基本单位矢量记作$\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_z$，分别指向ρ、φ、z增加的一侧。

于是，在M点处的任一矢量$\boldsymbol{a}$就可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+a_z\boldsymbol{e}_z \tag{7-6}$$

其中a_ρ、a_φ、a_z依次是$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$方向上的投影。

由于空间任何一点（原点除外）总是在某一圆柱面上，所以把(ρ,φ,z)称为柱面坐标，或圆柱坐标简称柱坐标。

三、球面坐标系

空间一点M的球面坐标，是这样的三个数(r,θ,φ)，其中r是M点到原点的距离；θ是线段$\overline{OM}$与Oz轴正向之间的夹角；φ为过点M且以Oz轴为界的半平面与xOz面之间的夹角（图7-3）。可以看出，M点的直角坐标与球面坐标的对应关系是

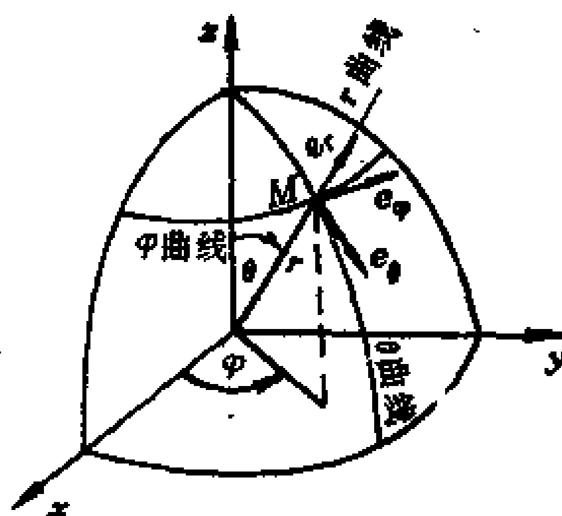


图7-3

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\theta\end{cases} \tag{7-7}$$

即有

$$
\begin{cases}
r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\theta=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}
\end{cases}
\tag{7-8}
$$

其中$0\leqslant r<+\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$。

在球面坐标系中，三坐标曲面是

r＝常数，即以原点O为中心的球面；

θ＝常数，即以Oz轴为轴，顶点在原点O的圆锥面；

φ＝常数，即以Oz轴为界的半平面。

三坐标曲线是

r曲线，即以原点O为起点的射线；

θ曲线，即过M点的半圆弧；

φ曲线，即圆心在Oz轴的半圆周。

显然，它们在空间点M处也是正交的。其基本单位矢量记作$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$，分别指向r，θ，φ增加的一侧。

这样，在M点处的任一矢量$\boldsymbol{a}$就可表示为

$$
\boldsymbol{a}=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \tag{7-9}
$$

其中a_r、a_θ、a_φ依次是$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$方向上的投影。

因为空间任何一点（原点除外）总是在某一球面上，所以把(r,θ,φ)称为球面坐标，简称球坐标。

四、曲线元素、曲面元素和体积元素在正交曲线坐标系中的表示式

1．现考察一般的正交曲线坐标系。设空间一点M，其矢径为$\boldsymbol{r}$（图7-4）。则由式（7-2），有

$$
\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3)
$$

$$= x(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{i} + y(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{j} + z(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{k}$$

即$\boldsymbol{r}$为曲线坐标q_1、q_2、q_3的函数。于是

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}dq_3$$

因为矢量$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$与坐标曲线$q_i(i=1,2,3)$在点$M$处相切，而$\boldsymbol{e}_i$又是坐标曲线$q_i$在点$M$处的基本单位矢量，故有

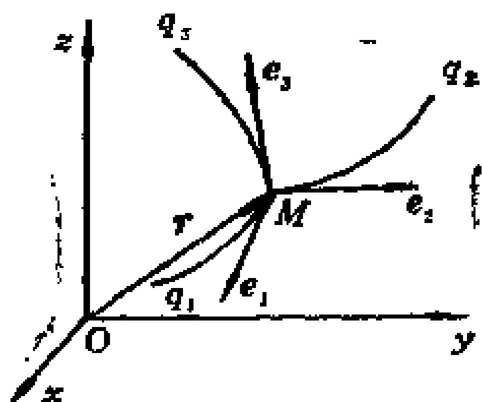


图7-4

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = H_i \boldsymbol{e}_i$$

其中$H_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|$，则

$$d\boldsymbol{r} = H_1 dq_1 \boldsymbol{e}_1 + H_2 dq_2 \boldsymbol{e}_2 + H_3 dq_3 \boldsymbol{e}_3 \qquad (7\text{-}10)$$

利用弧微分的公式，可将空间曲线的曲线元素dl表示为

$$dl = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

由第四章式(4-40)，又有

$$(dl)^2 = (dr)^2$$

则得

$$(dl)^2 = (H_1 dq_1)^2 + (H_2 dq_2)^2 + (H_3 dq_3)^2$$

设dl_1、dl_2、dl_3依次为过M点的坐标曲线q_1、q_2、q_3的曲线元素，因为在坐标曲线q_1上，只有坐标q_1在变化，其他两个坐标q_2，q_3都保持不变，即$dq_2 = dq_3 = 0$，于是有

$$dl_1 = H_1 dq_1$$

且

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1, dy = \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1, dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1$$

则

$$dl_1=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1\right)^2}$$

即

$$\begin{aligned}dl_1&=H_1dq_1\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,dq_1\end{aligned}\qquad(7\text{-}11)$$

（通常取坐标曲线弧长增大的方向与对应的曲线坐标增大时坐标曲线的走向相一致，这样，dl_1 与 dq_1 就有相同的正负号）。

类似地，对于坐标曲线q_2、q_3分别有

$$\begin{aligned}dl_2&=H_2dq_2\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}\,dq_2\end{aligned}\qquad(7\text{-}12)$$

$$\begin{aligned}dl_3&=H_3dq_3\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}\,dq_3\end{aligned}\qquad(7\text{-}13)$$

一般地，坐标曲线的曲线元素可以写成

$$dl_i=H_idq_i\qquad(i=1,2,3)\qquad(7\text{-}14)$$

式子右边的系数H_i可表示为

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\quad(i=1,2,3)\qquad(7\text{-}15)$$

H_i叫做拉梅(Lamé)系数，由上式可以看出，它们都是空间点M的坐标的函数。

依此，在正交曲线坐标下，空间曲线l的曲线元素矢量为

$$d\boldsymbol{l}=H_1dq_1\boldsymbol{e}_1+H_2dq_2\boldsymbol{e}_2+H_3dq_3\boldsymbol{e}_3\qquad(7\text{-}16)$$

从而，三坐标曲面元素为

$$\begin{cases} dS_1 = dl_2 dl_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3 \\ dS_2 = dl_1 dl_3 = H_1 H_3 dq_1 dq_3 \\ dS_3 = dl_1 dl_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2 \end{cases} \tag{7-17}$$

于是，空间曲面S的曲面元素矢量为

$$d\boldsymbol{S} = dS_1\boldsymbol{e}_1 + dS_2\boldsymbol{e}_2 + dS_3\boldsymbol{e}_3 \tag{7-18}$$

而空间区域Ω的体积元素为

$$\begin{aligned} dV &= dl_1 dl_2 dl_3 \\ &= H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned} \tag{7-19}$$

综上所述可以看出，在正交曲线坐标系下，所有$d\boldsymbol{l}$、$d\boldsymbol{S}$、dV的表示式中，都附有相应坐标曲线上的拉梅系数。

2. 应用以上所得的结果，以求出柱坐标系和球坐标系的曲线元素、曲面元素、体积元素以及拉梅系数。

对于柱坐标系(ρ,φ,z)，由式(7-4)，有

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

于是，根据式(7-15)，可算出拉梅系数为

$$H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho,\ H_z = 1 \tag{7-20}$$

而从式(7-16)、(7-17)、(7-18)和(7-19)，得出

$$\begin{cases} d\boldsymbol{l} = \{ d\rho, \rho d\varphi, dz \} \\ d\boldsymbol{S} = \{ \rho d\varphi dz, d\rho dz, \rho d\rho d\varphi \} \\ dV = \rho d\rho d\varphi dz \end{cases} \tag{7-21}$$

对于球坐标系(r,θ,φ)，由式(7-7)，有

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=r\cos\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta\sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \theta}=-r\sin\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi,\frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\sin\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0。$$

同样，由式(7-15)，得拉梅系数为

$$H_r=1,H_\theta=r,H_\varphi=r\sin\theta \tag{7-22}$$

又由式(7-16)—(7-19)，得出

$$\begin{cases} d\boldsymbol{l}=\{dr,rd\theta,r\sin\theta d\varphi\} \\ d\boldsymbol{S}=\{r^2\sin\theta d\theta d\varphi,r\sin\theta drd\varphi,rdrd\theta\} \\ dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{cases} \tag{7-23}$$

§7.2 梯度、散度、旋度及调和量在正交曲线坐标系中的表示式

一、梯度的表示式

由第五章有关方向导数与梯度的讨论可知，任一数性函数$u(q_1,q_2,q_3)$，其梯度$\mathrm{grad}u$在坐标曲线$q_i(i=1,2,3)$的单位切矢量$\boldsymbol{e}_i$方向上的投影，就等于函数u沿这个方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial e_i}$。而根据该章的式(5-9)，这个导数也等于函数$u$对坐标曲线$q_i$的曲线元素的导数$\frac{du}{dl_i}$。

在坐标曲线q_1上，由于q_2、q_3不变，有$dq_2=dq_3=0$，于是有

$$du=\frac{\partial u}{\partial q_1}dq_1$$

由式(7-14)，有$dl_1=H_1dq_1$，则

$$\frac{du}{dl_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}$$

从而有

$$\operatorname{grad}_{e_1}u=\frac{du}{dl_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}$$

同理可得

$$\operatorname{grad}_{e_2}u=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2},\operatorname{grad}_{e_3}u=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}$$

所以

$$\operatorname{grad}u=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{7-24}$$

于是，在正交曲线坐标系中，哈密顿算子∇的表示式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{7-25}$$

对于柱坐标(ρ,φ,z)，由式(7-20)和(7-24)，得

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{7-26}$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由式(7-22)和(7-24)，得

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{7-27}$$

二、散度的表示式

矢量场$\boldsymbol{a}$的散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint_S a_n dS}{V}$$

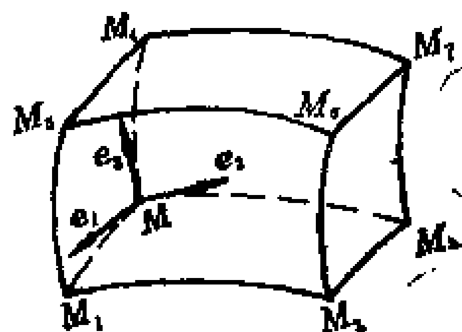


图7-5

其中V是闭曲面S所包围的体积，可取由q_1+dq_1，q_2+dq_2、q_3+dq_3所构成的闭曲

面S，于是S围成一无穷小的曲面平行六面体(图7-5)。

为了计算矢量场$\boldsymbol{a}$穿出S外侧的通量，可先分别算出$\boldsymbol{a}$穿过两相对的平行曲面的通量。此平行六面体的一面$MM_3M_7M_4$，由式(7-17)，其面积为$H_2H_3dq_2dq_3$。因为闭曲面的法矢量朝外，故这面上的法矢量与$\boldsymbol{e}_1$反向，因而$\boldsymbol{a}$在该面上的法线分量等于$-\boldsymbol{a}_1$(这里$\boldsymbol{a}_i$表示矢量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}_i$上的投影)，于是穿过这面上的通量为$-a_1H_2H_3dq_2dq_3$。与$MM_3M_7M_4$相对的一面是$M_1M_2M_6M_5$。这个面所不同的只是其上q_1的坐标值为q_1+dq_1，而其他各坐标在此面上的值完全相同，那么穿过$M_1M_2M_6M_5$这个面的通量就是

$$\left[a_1H_2H_3+\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1\right]dq_2dq_3$$

于是，穿过前后相对的两平行曲面$MM_3M_7M_4$与M_1M_2-M_6M_5的通量等于

$$\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3$$

类似地，穿过左右相对的两曲面$MM_4M_5M_1$与M_3M_7-M_6M_2的通量等于

$$\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3$$

穿过上下相对的两曲面$MM_1M_2M_3$与$M_4M_5M_6M_7$的通量等于

$$\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

以上三式相加，得总通量

$$\oiint_S a_n dS=\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}\right.$$

$$+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\Big]dq_1dq_2dq_3$$

因此，矢量$\boldsymbol{a}$在点M处的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\Big[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\Big] \quad (7\text{-}28)$$

对于柱坐标(ρ,φ,z)，由式(7-20)和(7-28)，得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (7\text{-}29)$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由式(7-22)和(7-28)，得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(a_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \quad (7\text{-}30)$$

三、旋度的表示式

我们知道，旋度矢量$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$在$n$方向的投影，等于矢量$\boldsymbol{a}$在该方向的环量面密度：

$$\operatorname{rot}_n\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

依此，如果令$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，就分别得到$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$在坐标曲线$q_1$、$q_2$、$q_3$方向上的投影。按照旋度的定义和性质，取一曲面$S_1$，其边界曲线$l$由$\overset{\frown}{MM_3}$、$\overset{\frown}{M_3M_7}$、$\overset{\frown}{M_7M_4}$与$\overset{\frown}{M_4M}$连成(图7-5)。且假定线积分的取向也沿着 $M\to M_3\to M_7\to M_4\to M$ 这个方向。而l所围曲面S_1的面积为$dS_1=H_2H_3dq_2dq_3$，且其法矢量与$\boldsymbol{e}_1$同向。

则有

$$\int_{\overset{\frown}{MM3}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = a_2 dl_2 = a_2 H_2 dq_2$$

$$\int_{\overset{\frown}{M4M7}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \left[a_2 H_2 + \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3} dq_3\right] dq_2$$

同理，有

$$\int_{\overset{\frown}{MM4}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = a_3 dl_3 = a_3 H_3 dq_3$$

$$\int_{\overset{\frown}{M3M7}} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \left[a_3 H_3 + \frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2\right] dq_3$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_{MM3M7M4M} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} &= \int_{\overset{\frown}{MM3}} + \int_{\overset{\frown}{M3M7}} + \int_{\overset{\frown}{M7M4}} + \int_{\overset{\frown}{M4M1}} \\ &= \int_{\overset{\frown}{MM3}} + \int_{\overset{\frown}{M3M7}} - \int_{\overset{\frown}{M4M7}} - \int_{\overset{\frown}{MM4}} \\ &= \left[\frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3}\right] dq_2 dq_3\end{aligned}$$

以该曲面面积$H_2H_3dq_2dq_3$除之，即得

$$\mathrm{rot}_1\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3}\right]$$

（这里用$\mathrm{rot}_i\boldsymbol{a}$表示$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$在坐标曲线$q_i$方向上的投影）类似地，有

$$\mathrm{rot}_2 a = \frac{1}{H_3 H_1}\left[\frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_1}\right]$$

$$\mathrm{rot}_3 a = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_2}\right]$$

所以

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3}\right]\boldsymbol{e}_1$$

$$
+\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1}\right]\boldsymbol{e}_2
$$

$$
+\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2}\right]\boldsymbol{e}_3 \qquad (7\text{-}31)
$$

或

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_2H_3} & \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_3H_1} & \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1H_2}\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_2\end{vmatrix} \qquad (7\text{-}32)
$$

对于柱坐标(ρ,φ,z)，由式(7-20)和(7-32)，得

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi
$$

$$
+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z \qquad (7\text{-}33)
$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由式(7-22)和(7-32)，得

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, a_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r
$$

$$
+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta
$$

$$
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (7\text{-}34)
$$

四、调和量的表示式

调和量$\nabla^2u=\triangle u=\mathrm{div\ grad}u$，令$\mathrm{grad}u=\boldsymbol{a}$，则由式(7-24)和(7-28)，即可得出调和量在正交曲线坐标下的表示式：

$$
\triangle u=\nabla^2u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)\right.
$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\Bigg] \quad (7\text{-}35)$$

对于柱坐标(ρ,φ,z)，由式(7-20)与(7-35)，得

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad (7\text{-}36)$$

对于球坐标(r,θ,φ)，由式(7-22)与(7-35)，得

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \quad (7\text{-}37)$$

五、计算举例

1. 已知数性函数

$$u(r,\theta,\varphi)=\left(ar^2+\frac{1}{r^3}\right)\sin2\theta\cos\varphi,$$

求$\mathrm{grad}u$。

解 在球面坐标系中，由式(7-27)

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

以$u=\left(ar^2+\frac{1}{r^3}\right)\sin2\theta\cos\varphi$代入，即得

$$\mathrm{grad}u=\left(2ar-\frac{3}{r^4}\right)\sin2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+2\left(ar+\frac{1}{r^4}\right)\cdot\cos2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta-2\left(ar+\frac{1}{r^4}\right)\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

2. 已知数性函数

$$u(\rho,\varphi,z)=\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\rho\cos\varphi$$

求（1）$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}u$;（2）$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$。

解　（1）在柱面坐标系中，由式(7-26)

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

以$u=\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\rho\cos\varphi$代入，得

$$\mathrm{grad}u=\left[\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\cos\varphi-\frac{2b^2}{\rho^2}\cos\varphi\right]\boldsymbol{e}_\rho$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\rho(-\sin\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi+0$$

$$=-\left(\frac{b^2}{\rho^2}+1\right)\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \tag{7-38}$$

（2）在柱面坐标系中，由式(7-29)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho a_z)}{\partial z}\right] \tag{7-39}$$

因$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}u=\mathrm{grad}\left[\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\rho\cos\varphi\right.$，则由式(7-38)，得

$$a_\rho=-\left(\frac{b^2}{\rho^2}+1\right)\cos\varphi$$

$$a_\varphi=-\left(\frac{b^2}{\rho^2}-1\right)\sin\varphi$$

$$a_z=0$$

代入式(7-39)，即得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{2b^2}{\rho^3}\cos\varphi-\left(\frac{b^2}{\rho^2}+1\right)\cos\varphi\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a^2}{\rho^2}-1\right)\cos\varphi\right]$$

$$=0\qquad(\rho\neq0)$$

3．设$u=r(\cos\theta+\sin\theta)$，其中$r$为变点$M$到固定点$O$的距离，而$\overline{OM}$与固定方向$Oz$构成角度$\theta$。求$u$的梯度，以及在曲面$u=$常数上，$\theta=\frac{\pi}{3}$时任一点处的单位法矢量。

解 按题意，r和θ可作为球面坐标中的头两个坐标。由式(7-27)

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u} &= \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\\ &=(\cos\theta+\sin\theta)\boldsymbol{e}_r+(\cos\theta-\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

因为这矢量的模是$\sqrt{2}$，则$\mathrm{grad}\,u$方向的单位矢量为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

因而在曲面$u=$常数上，$\theta=\frac{\pi}{3}$时，任一点处单位法矢量即为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})\boldsymbol{e}_\theta$$

4．证明柱面坐标(ρ,φ,z)是正交的。

证 在柱面坐标系中，任一点M的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}\quad x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+\rho\sin\varphi\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

坐标曲线ρ、φ、z的切向矢量分别由$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\rho}$，$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}$，$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}$给出，其中

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\rho}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j}\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{k}$$

于是沿这些方向的基本单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_\rho=\frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial\rho}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial\rho|}=\frac{\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial\varphi}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial\varphi|}=\frac{-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}}$$

$$=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_z=\frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial z}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial z|}=\boldsymbol{k}$$

则有

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})\cdot(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})=0$$

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{k})=0$$

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{k})=0$$

故$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$相互垂直，因而坐标系是正交的。

5. 已知矢量场

$$\boldsymbol{a}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos^2\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

求rot$\boldsymbol{a}$。

解 在柱面坐标系中，由式(7-33)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z$$

已知$a_\rho=\rho\cos^2\varphi$，$a_\varphi=\rho\sin\varphi$，$a_z=0$，代入上式，即得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0\cdot\boldsymbol{e}_\rho+0\cdot\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}[2\rho\sin\varphi+2\rho\cos\varphi\sin\varphi]\boldsymbol{e}_z$$

$$=2\sin\varphi(1+\cos\varphi)\boldsymbol{e}_z$$

6. 已知数量场

$$u(r,\theta,\varphi)=2r\sin\theta+r^2\cos\varphi$$

求调和量$\triangle u$。

解 在球面坐标系中，由式(7-37)

$$\triangle u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big]$$

以$u=2r\sin\theta+r^2\cos\varphi$代入，即得

$$\triangle u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\sin\theta+2r^2\cos\varphi)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta 2r\cos\theta)-\frac{1}{\sin\theta}r^2\cos\varphi\Big]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[4r\sin^2\theta+6r^2\sin\theta\cos\varphi+2r\cos 2\theta$$

$$-\frac{r^2\cos\varphi}{\sin\theta}\Big]=\frac{4\sin\theta}{r}+6\cos\varphi+\frac{2\cos 2\theta}{r\sin\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta}$$

7．设矢量场

$$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$$

问$\boldsymbol{a}$的势函数是否存在?若存在，求出势函数。

解 应用球面坐标(r,θ,φ)，由式(7-34)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r\sin\theta}\Big[\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\Big]\boldsymbol{e}_r$$

$$+\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\Big]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\Big[\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\Big]\boldsymbol{e}_\varphi$$

由于

$$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{r^3}(r\boldsymbol{e}_r+0\cdot\boldsymbol{e}_\theta+0\cdot\boldsymbol{e}_\varphi)=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

容易算出$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$，故$\boldsymbol{a}$为有势场，

于是

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

且有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=0,\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0 \tag{7-40}$$

式中第一个方程的解为

$$u=\frac{1}{r}+f(\theta,\varphi) \tag{7-41}$$

其中$f(\theta,\varphi)$是待定的任意可微函数。将上式对θ求导，则由式(7-40)中的第二个方程可知，有$\frac{\partial f}{\partial \theta}=0$，积分得

$$f=g(\varphi)$$

式中$g(\varphi)$为待定的任意可微函数，以f代入式(7-41)，有

$$u=\frac{1}{r}+g(\varphi) \tag{7-42}$$

再将上式对φ求导，由式(7-40)中的第三个方程知，有

$$\frac{dg}{d\varphi}=0$$

于是

$$g=C$$

这里C是任意常数。将$g=C$代入式(7-42)，得

$$u=\frac{1}{r}+C$$

所以势函数为

$$v=-u=-\frac{1}{r}+C_1$$

习　题

1. 已知数量场$u=r(\cos\theta-\sin\theta)$，其中$r,\theta$为球面坐标。试求（1）grad$u$，（2）曲面$u=$常数上任一点处，当$\theta=\alpha(\alpha\neq0)$时的单位法矢量。

2. 设$u=r^2$，其中r是变点M到固定点O的距离，求u的梯

度。

3. 已知矢量场$\boldsymbol{a}(r,\theta,\varphi)=\frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r+\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$，求div$\boldsymbol{a}$。

4. 设矢量场

$$\boldsymbol{a}=\{-\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z\cos\varphi\}$$

证明$\boldsymbol{a}$是无源场。(其中ρ,φ,z是柱面坐标)

5. 已知方程

$$x=\rho\cos\varphi$$

$$y=\rho\sin\varphi$$

$$z=z$$

确定了直角坐标到柱面坐标的变换，试确定出柱面坐标到直角坐标的变换。

6. 给定数量场$u=r(\cos\theta+\sin\theta)$，其中$r,\theta$为球面坐标，计算调和量$\Delta u$。

7. 计算div$\boldsymbol{a}$，其中矢量通过球面坐标$\boldsymbol{a}=\{\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta-\sin\theta,0\}$表出。

8. 设数量场$u=f(\rho)$，其中ρ为空间一点M到某一固定直线的距离，且又满足$\Delta u=0$。试求u的一般形式。〔提示：将固定直线选作Oz轴〕

9. 试决定n的值，使得$r^n\boldsymbol{r}$是一无源场。这里$\boldsymbol{r}$为矢径，而r是$\boldsymbol{r}$的模。

10. 证明$\text{rot}(\varphi\,\text{grad}\,\rho)=-\frac{1}{\rho}\text{grad}\,z$，其中$\rho$、$\varphi$、$z$为柱面坐标。

11. 已知矢量场$\boldsymbol{a}=-\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+z\cos\varphi\boldsymbol{e}_z$，其中$\rho,\varphi,z$为柱面坐标。证明当$\varphi=0$时，rot$\boldsymbol{a}=0$。

12. 设有数量场$u=f(r)$，这里r是空间一变点M到固定点O的距离，并且有$\Delta u=0$。试求u的一般形式。〔提示：应用球面坐标公式〕

13. 对于以球面坐标给出的矢量场

$$\boldsymbol{a}=\{-2Cr\sin\theta\cos\varphi,-Cr\cos\theta\cos\varphi,Cr\sin\varphi\}$$

(其中C为常数)。问势函数是否存在？若存在，求出来。

14. 设空间一点M，它的柱面坐标为$M(\rho,\varphi,z)$，球面坐标为$M(r,\theta,\varphi)$。(1)在这两种坐标系中分别写出矢径$=\overrightarrow{OM}$的表示式；(2)证明：在这两种坐标系中，$\boldsymbol{r}$的散度都等于3。

附录 ∇ 算 子

∇(读作"Nabla",或"del")算子又叫做哈密顿算子,它的作用在于简化运算手续,在场论中有着广泛的应用。

一、∇算子的运算性质

我们在第五章引用过哈密顿算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

它的运算规则是

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$
= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}
$$

因此，应用∇算子，就可将场论中的梯度、散度和旋度依次表示为

$$\mathrm{grad}\,u = \nabla u$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$

（这里假定数性函数u和矢性函数$\boldsymbol{a}$的分量a_x、a_y、a_z具有一阶或二阶连续偏导数。）

1．根据∇算子的定义，它包含矢性与微分的双重性质，并且是一阶微分算子。由∇的运算规则表明，它可作用于数性函数，也可作用于矢性函数，其可能的作用方式仅有以下的三种

$$\nabla u, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{a}, \quad \nabla \times \boldsymbol{a}$$

其中∇u表示∇作用于u，即矢量与数量的乘积，得一矢量；$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$表示$\nabla$作用于$\boldsymbol{a}$，即矢量与矢量的点积，得一数量；$\nabla \times \boldsymbol{a}$表示$\nabla$作用于$\boldsymbol{a}$，即矢量与矢量的叉积，得一矢量。由此可见，$\nabla$象一般的矢量那样，可以作点乘、叉乘的运算。另一方面，它的分量又是微分算符：$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$，当这些分量与矢量的分量（或数性函数）相乘时，就表示它对此分量作微分运算。因此，哈密顿算子∇是一个矢性微分算子。

由以上的讨论可以看出，在“∇”之后必为数性函数，而在“$\nabla \cdot$”与“$\nabla \times$”之后只能是矢性函数。因而其他的组合形式，比如$\nabla \boldsymbol{a}$，$\nabla \cdot u$或$\nabla \times u$等，也就毫无意义。

2. 事实上，∇只是一个运算符号，它本身并没有具体的意义，只有与它后面的数性函数或矢性函数相结合，才具有确定的意义，才能作为矢量来施行运算。在运算过程中，人们约定，∇对它后面(即右边)的函数要起作用，而对它前面(即左边)的函数不起作用。由此可以看出，$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}\cdot\nabla$是完全不同的。显然，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

而

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (*)$$

(为了使用上的方便，也定义(*)这种形式的算子。)

3. 我们知道，两矢量的标积是满足交换律的。但是，在应用∇算子进行运算时，却不能任意交换两相乘因子的顺序。例如式(*)中的$\boldsymbol{a}\cdot\nabla$只能表示为

$$a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

如果将它改写为$\frac{\partial}{\partial x}a_x+\frac{\partial}{\partial y}a_y+\frac{\partial}{\partial z}a_z$，这就错了，因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\neq\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

4. 前面我们还引入过另一种算子，即拉普拉斯算子

$$\triangle=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(读作“Laplacian”，或“del平方”)，容易看出，这是一个二阶的数性微分算子，正如前面所指出的，拉普拉斯算子可以作用于数性函数，也可作用于矢性函数。

二、∇算子的基本公式

为了便于查阅，现将算子∇在场论中的一些常用公式列出。其中u与v为数性函数，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为矢性函数，并且满足下列各式成立时所需要的条件。

(1) $\nabla(Cu)=C\nabla u$ （C为常数）

(2) $\nabla\cdot(C\boldsymbol{a})=C\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ （C为常数）

(3) $\nabla\times(C\boldsymbol{a})=C\nabla\times\boldsymbol{a}$ （C为常数）

(4) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

(5) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{b}$

(6) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}\pm\nabla\times\boldsymbol{b}$

(7) $\nabla\cdot(v\boldsymbol{K})=\nabla u\cdot\boldsymbol{k}$ （$\boldsymbol{K}$为常矢）

(8) $\nabla\times(v\boldsymbol{K})=\nabla u\times\boldsymbol{k}$ （$\boldsymbol{K}$为常矢）

(9) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

(10) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})=u\nabla\cdot\boldsymbol{a}+a\cdot\nabla u$

(11) $\nabla\times(u\boldsymbol{a})=u\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla u\times\boldsymbol{a}$

(12) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$

(13) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$

(14) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

(15) $\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u=\Delta u$

(16) $\nabla\times(\nabla u)=0$

(17) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$

(18) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}$

(19) $\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(20) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$

(21) $\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$

(22) $\nabla f(u) = f'(u) \nabla u$

(23) $\nabla f(r) = \dfrac{f'(r)}{r} \boldsymbol{r}$

(24) $\nabla \times [f(r) \boldsymbol{r}] = 0$

(25) $\nabla \times \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) = 0 \qquad (r \neq 0)$

对于以上公式，需要说明的是：

（1）开头的八个公式是最基本的公式，可以根据∇算子的运算规则直接推导出来。而且利用这几个公式，就可推证出其后的一些公式。

（2）公式中的(15)—(18)属于二阶微分运算，其他的公式属于一阶微分运算。公式(15)右端的Δu是调和量；公式(16)、(17)分别表示“梯度场无旋”与“旋度场无源”。

（3）公式(19)—(21)是关于点的矢径$\boldsymbol{r}$的基本公式。其中$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$。而最后的几个式子则是有关复合函数的公式。

三、计算举例

1． 证明$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$

证　这是对两个数性函数之积求偏导数的运算。在多元函数偏微分法中，求偏导数的法则是：每次只对其中一个因子求偏导数，而把另一个因子看作常数。哈密顿算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

实际上是三个数性微分算子$\dfrac{\partial}{\partial x}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}$的线性组合，它们是服从乘积的微分法则的。因而，作为这些数性微分算子的线

性组合的∇，在其微分性质中，自然也服从乘积的微分法则。于是根据∇算子的微分性质，并按照乘积的微分法则，即有

$$\nabla(uv)=\nabla(u_C v)+\nabla(u v_C)$$

其中u_C和v_C表示在运算中它们暂时被看作常数，故可提到∇的前面去，得到

$$\nabla(u_C v)+\nabla(u v_C)=u_C\nabla v+v_C\nabla u$$

现在u_C，v_C都已在算子∇的前面，而由∇的运算法则可知，这时∇对它不起作用，故可去掉下标C，这样就得出

$$\nabla(uv)=u_C\nabla v+v_C\nabla u=u\nabla v+v\nabla u$$

为了便于理解，可对照下面的推导来思考。

$$\begin{aligned}\nabla(uv)&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)uv\\&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(uv)}{\partial z}\\&=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\\&=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\&\quad+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\&=u\nabla v+v\nabla u\end{aligned}$$

2. 证明$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$

证 根据乘积的微分法则，以及算子∇的微分性质，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_C\times\boldsymbol{b})+\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_C)$$

再根据∇的矢量性质，上式右端两项都可看作三矢量的混合积，于是可应用矢量代数中的混合积公式

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

根据三矢量(将∇看作$\boldsymbol{c}$)在其混合积中位置的轮换性，将式中右端两项的常矢都轮换到∇的前面，同时使得变矢则都留在∇的后面。即得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_C\times\boldsymbol{b})+\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_C)\\&=-\boldsymbol{a}_C\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}_C\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

3。证明$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

证　由∇的微分性质，应用乘积的微分法则，有

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}_C\times\boldsymbol{b})+\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_C)$$

再根据∇的矢量性质，就可将右端两项都看作三矢量的二重矢积。于是利用矢量代数中的二重矢积公式

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

分别变换式中右端的两项(将∇看作$\boldsymbol{c}$)，则有

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{a}_C\times\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}_C(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}_C\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\\\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_C)&=(\boldsymbol{b}_C\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}_C(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

所以得

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$

以上两例分别应用了三矢量的混合积公式与二重矢积公式，可以看出，在应用这些公式时，一定要设法将其中的常矢移到∇的前面，而使变矢留在∇的后面。

4。证明$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}$。

证　这是∇的二阶微分运算。根据三矢量的二重矢积公

式

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

于是得(将前后两个∇分别看作$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\\&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

5. 证明$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$。

证　$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3},\quad\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)\\&=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^6}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\\&=0\end{aligned}$$

6. 设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$均为调和场，证明

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}[\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]$$

证　因为

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$
$$+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$

根据题设,有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{b}=0$$

则以上两式成为

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

由此有

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}[\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]$$

习　题

1. 证明$\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$r=|\boldsymbol{r}|$。

2. 若$\boldsymbol{a}$为有势场,证明$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{a}^2)$。〔提示:在$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$中,令$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$〕

3. 证明$\nabla\times(u\boldsymbol{a})=u\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla u\times\boldsymbol{a}$。

4. 证明$\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

5. 证明$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$。〔提示:应用二重矢积公式。〕

6. 证明$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)u=\boldsymbol{a}\cdot\nabla u$。

7. 证明$\nabla^2r^n=n(n+1)r^{n-2}$。

8. 证明$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$。

习题答案

第一章

§1.1 习　　题

1. (1)、(2)、(5)、(6)、(8)是标量；
   (3)、(4)、(7)、(9)、(10)是矢量。
2. 两对；没有；没有。
3. (1)合理；(2)不合理；(3)合理；(4)不合理。
4. 三组；三组。
5. 以该起点为球心半径为1的球面；以该起点为圆心半径为1的圆周。
6. 共线。
7. (1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，(2) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$位于同一直线上。
8. 不一定共面。
9. $\overrightarrow{AB} = 5\mathbf{m}, \overrightarrow{BC} = 5\mathbf{n}, \overrightarrow{CD} = 5\mathbf{p}$，
   $\overrightarrow{DE} = -5\mathbf{m}, \overrightarrow{EF} = -5\mathbf{n}, \overrightarrow{FA} = -5\mathbf{p}$。

§1.2 习　　题

2. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 13$；$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 13$
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$；$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$；
   $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \mathbf{d}-\mathbf{c}$；$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \mathbf{a}-\mathbf{d}$；
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{c}-\mathbf{a}$，$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$
   $= \mathbf{d}-\mathbf{b}$。
6. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$。

7. （1）$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$；（2）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$共线，同向；（3）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$共线、反向，且$|\mathbf{a}|\geqslant|\mathbf{b}|$；

（4）共线，反向；（5）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$夹角为锐角；（6）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$夹角为钝角。

8. $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DF}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$；

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$；

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BG}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$；

$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GB}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$。

12. $|\mathbf{F}|=|\mathbf{P}|$；$|\mathbf{T}|=\sqrt{2}|\mathbf{P}|$。

14. （1）船速8×10^3米/小时，方向与横渡方向成$\theta\approx37°$（偏上游）；

（2）船速11.66×10^3米/小时，方向为$\theta\approx31°$（偏下游）。

17. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$。

18. $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$；$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{4}\mathbf{a}-\mathbf{b}$；

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}$。

20. 风向西偏北56°24′；

风速18公里/小时。

§1.3 习　　题

1. 共线，指向相同。

2. 模为1，方向指向等角线方向。

3. （1）共线，$\lambda\neq1$；（2）$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$。

5. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{37}$，$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{13}$。

8. $\mathbf{x}=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$，$\mathbf{y}=-2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$。

10. 1

§1.4 习　　题

1. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

2. 共线。

3. 共面$\mathbf{a}-\mathbf{b}=-(\mathbf{b}-\mathbf{c})-(\mathbf{c}-\mathbf{a})$。

4. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

5. $\overrightarrow{OB}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OD}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$。

6. $m=2/3$; $p=13/12$。

7. $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$。

8. $\mathbf{a}=2\mathbf{c}-\mathbf{d}$; $\mathbf{b}=3\mathbf{c}-2\mathbf{d}$。

9. $|\mathbf{a}|\neq 0$, $|\mathbf{b}|\neq 0$, 必有$m=n=0$。

10. 共面。

11. (1)$m_1=m_2$, $n_1=n_2$, $p_1=p_2$. (2)$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}=\lambda$。

第 二 章

§2.1 习　题

1. (1)不一定; (2)仅当几个矢量与两轴所在平面皆平行时可以肯定，否则不一定; (3)一定。

2. (1)仅当两矢量与轴平行时可以肯定; (2)仅当两矢量与两轴所在平面平行时可以肯定; (3)肯定。

3. (1)$\frac{5}{12}\pi$; (2)$-\frac{5}{12}\pi$; (3)$\frac{5}{12}\pi$。

4. $|\lambda|=3$，即$\mathbf{b}$的模为$\mathbf{a}$的3倍; λ为负，方向相反。

5. 13; 7; 15。

6. $\frac{\pi}{2}$。

7. $(\overrightarrow{AB})_l=c\sin\alpha$; $(\overrightarrow{BC})_l=-a\sin\gamma$; $(\overrightarrow{AC})_l=0$。

8. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+5\mathbf{q}$。

9. $\mathbf{a}=2\mathbf{r}+\mathbf{s}-3\mathbf{t}$。

10. $x=4$, $y=-1$。

§2.2 习　题

1. 三个互相垂直的基本单位矢量; 不是。

2. （1）共线；（2）不共线。

3. （1）$\perp x$轴（即$//yoz$面）；（2）$\perp z$轴；（3）$\perp y$轴；（4）$//z$轴。

4. $(2,-1)$；$(3,1)$。

5. （1）1；[illegible]，[illegible]，$-$[illegible]；（2）1；$-$[illegible]，[illegible]，[illegible]；（3）9；[illegible]，[illegible]，[illegible]。

6. $|\mathbf{f}|=5$；$\cos\alpha=$[illegible]，$\cos\beta=$[illegible]。

7. $\mathbf{a}=-\mathbf{p}-\mathbf{q}+2\mathbf{r}$。

8. （1）$\mathbf{p}=\{1,8,5\}$；（2）$\mathbf{q}=\{16,0,-23\}$；

（3）$=\{3\lambda+2\mu+4v,5\lambda+2\mu-v,-\lambda+3\mu-3v\}$。

10. $x=4,z=-1$。

11. （1）$|\mathbf{a}|=3,|\mathbf{b}|=\sqrt{38}$，$|\mathbf{c}|=3$；（2）$\mathbf{a}=3\mathbf{a}^\circ,\mathbf{b}=\sqrt{38}\mathbf{b}^\circ$，

$\mathbf{c}=3\mathbf{c}^\circ$

12. $|\mathbf{f}|=3\sqrt{5}$；$\frac{-4\sqrt{5}}{15}$，$\frac{2\sqrt{5}}{15}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}$。

13. $0,0,-1$或$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0。

15. $-\frac{1}{10}$，$\frac{1}{5}$。

16. $\left\{\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$或$\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$。

17. （1）$B(1,-2),C(-3,0),D(-1,1)$；（2）$AC=\sqrt{37}$，

$BD=\sqrt{13}$；（3）$\overrightarrow{OE}=\{0,-\frac{1}{2}\}$。

18. $\gamma=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，$\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\sqrt{2}\mathbf{k}$或 $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k}$。

§2.3 习　　题

1. $(-2,-4)$；$(-2,6)$；$(6,-4)$；$(6,6)$。

2. （1）$(3,5)$；（2）$(-5,0)$

3. $x=x'+2,y=y'-4$。

4. （1）$x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$；

（2）$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$；$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$；

(3) $x=-x', y=-y'$。

5. M: $\begin{cases} (1)\ x'=2\sqrt{2},\ y'=-\sqrt{2}, \\ (2)\ x'=1, y'=-3, \\ (3)\ x'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-3), y'=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-1), \end{cases}$

N: $\begin{cases} (1)\ x'=2\sqrt{2},\ y'=3\sqrt{2}, \\ (2)\ x'=5, y'=1, \\ (3)\ x'=\frac{1}{2}(1+5\sqrt{3}), y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-5)。 \end{cases}$

P: $\begin{cases} (1)\ x'=-2\sqrt{2}, y'=\sqrt{2}, \\ (2)\ x'=-1, y'=3, \\ (3)\ x'=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}, y'=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+1)。 \end{cases}$

6. $x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y', y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$。

7. (1) $x=x'+3, y=y'+1, z=z'-2$。

(2) $M_1: x'=-3, y'=1, z'=1$, $M_2: x'=-4, y'=0, z'=5$。

8. $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=-\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'+5$,

$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y', z=z'$。

9. $\begin{cases} x=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z' \\ y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z' \\ z=\frac{1}{2}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'。 \end{cases}$

10. $x'^2+y'^2+(1+\sqrt{3})x'+(-1+\sqrt{3})y'+2-R^2=0$

第 三 章

§3.1 习　　题

1. (1) -6; (2) 6; (3) 6; (4) 9; (5) 16; (6) 37; (7) 13; (8) -7;

(9) -61。

2. (2)、(5)、(6)、(7)正确；(1)、(3)、(4)、(8)、(9)不正确；

不过，若**a**、**b**共线，则(4)，(8)成立。

3. $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$。

4. $-\frac{3}{2}$。

5. -5。

11. $\theta=\arccos\frac{4}{5}\approx 36.7°$。

12. (1) -4；(2) $9\sqrt{2}$；(3) 角$\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\approx 108°19'$；(4) $-\frac{2\sqrt{2}}{8}$。

13. $W=8N\cdot m$；$\cos\langle \mathbf{F},\mathbf{s}\rangle=$ [illegible]。

14. $z=1$；$(\mathbf{U}-2\mathbf{V})^2=402$。

15. $\mathbf{x}=\left\{\frac{8}{17},\frac{24}{17},\frac{108}{17}\right\}$。

16. $\theta=\frac{\pi}{8}$。

17. $W=500N\cdot m$。

18. $\mathbf{x}=\{-4,2,-4\}$

19. $|\mathbf{s}|=\sqrt{14}$；$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{8}{\sqrt{14}}$。

§3.2 习　　题

1. (1)表示以两矢量为邻边的平行四边形面积；(2)不对。

2. (1)不是；(2) $\mathbf{a}^0\perp\mathbf{b}^0$。

3. 垂直于$\mathbf{a}^0$、$\mathbf{b}^0$的单位矢量。

4. (1) $2(\mathbf{k}-\mathbf{i})$；(2) $2(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$；(3) $8(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$；(4) $2\mathbf{p}\times\mathbf{m}+3\mathbf{n}\times\mathbf{p}$。

5. (1) $4\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$；(2) $-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$；(3) $56\mathbf{i}-70\mathbf{j}+42\mathbf{k}$；
   (4) $-\mathbf{j}-\mathbf{k}$。

6. $S=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$。

7. (1) 3；(2) 27。

9. 5。

10. (1) $14\mathbf{i}-38\mathbf{j}+16\mathbf{k}$；(2) $-36\mathbf{i}-38\mathbf{j}-14\mathbf{k}$。

12. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k})$。

13. (1) $\mathbf{r}=-2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}$；(2) $|\mathbf{r}_1|=9.43$；$|\mathbf{r}_2|=11.36$；
    $|\mathbf{r}|=7.87$；(3) $\alpha=43°16'$；$\beta=98°30'$；$\gamma=55°15'$；

(4) $-65\mathbf{i}-4\mathbf{j}+34\mathbf{k}$。

15. (1) $\angle A=90^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=30^\circ$。

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{13}$; $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{39}$; $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{13}$。

16. $|\overrightarrow{CD}|=2$。

§3.3 习　题

1. (1) $-8\mathbf{j}-24\mathbf{k}$; (2) 2; (3) $\{2,1,21\}$。

2. (1) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$; (2) $3\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$。

4. (1) $\mathbf{j}-\mathbf{i}$; (2) $\mathbf{k}-\mathbf{i}$。

7. $V=20$。

8. $V=\frac{4}{3}$。

9. (1)共面; (2)共面。

10. 当$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$时。

11. $V=18$; $V=3$。

12. c与a共线。

14. 都等于27。

第　四　章

习　题

1. (1)直线, $y-b=\mathrm{tg}\theta\cdot(x-a)$; (2)抛物线, $y=2x^2+1$;

(3)椭圆, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$;

(4)双曲线, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

2. (1) $\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c}\right)+\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$;

(2) $\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\times\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c}\right)+\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$。

3. $\mathbf{r}=(2a\cos\theta-a\cos2\theta)\mathbf{i}+(2a\sin\theta-a\sin2\theta)\mathbf{j}$

4. (1) $\{2,6,10\}$; (2) $2\sqrt{35}$; (3) $\{0,-12,0\}$; (4)略

5. (1) $\left\{-\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{1}{(1-\sqrt{t})^{4/3}}},\ -\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{1}{(1-\sqrt[3]{t})^{3/4}}},0\right\}$;

(2) $\{0, \sin 2\theta, -\sin 2\theta\}$; (3) $\{(2\cos^2\lambda-\sin 2\lambda)e^{2\lambda}, 0,$
$2(\sin^2\lambda+\sin 2\lambda)e^{2\lambda}\}$; (4) $\left\{\frac{-1}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, 0\right\}$

6. (1) $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=e^{-t}\mathbf{i}-6\sin 3t\mathbf{j}+6\cos 3t\mathbf{k}$; $\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e^{-t}\mathbf{i}$
$-18\cos 3t\mathbf{j}-18\sin 3t\mathbf{k}$。 (2) $|\mathbf{v}|=\sqrt{37}$, $|\mathbf{a}|=\sqrt{325}$。

7. $\{2x\sin y dx+x^2\cos y dy, 2z\cos y dz-z^2\sin y dy,$
$y^2dx+2xydy\}$。

8. $\frac{x-at}{a}=\frac{y-bt^2}{2bt}=\frac{z-ct^3}{3ct^2}$;

$a(x-at)+2bt(y-bt^2)+3ct^2(z-ct^3)=0$。

9. (1) $(5t^2-1)\cos t+11t\sin t$; (2) $(t^3\sin t-3t^2\cos t)\mathbf{i}$
$-(t^3\cos t+3t^2\sin t)\mathbf{j}+(5t^2\sin t-11t\cos t-\sin t)\mathbf{k}$;
(3) $100t^3+2t+6t^5$。

10. (1) 切线 $\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{6}=\frac{z-3}{12}$; 法平面 $2x+12y+24z-91=0$;

(2) $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1\\ y=\frac{b}{2}\end{cases}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$;

(3) $x-1=y-1=\frac{1}{2}(z-1)$; $x+y+2z=4$。

11. $(-1,1,-1)$与$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$。

16. $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}=(4xy-4x^3)\mathbf{i}+(ye^{xy}-y\cos x)\mathbf{j}+2x\cos y\mathbf{k}$;

$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}=(2x^2)\mathbf{i}+(xe^{xy}-\sin x)\mathbf{j}-x^2\sin y\mathbf{k}$;

$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2}=(4y-12x^2)\mathbf{i}+y^2(e^{xy}+y\sin x)\mathbf{j}+2\cos y\mathbf{k}$;

$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2}=x^2e^{xy}\mathbf{j}-x^2\cos y\mathbf{k}$; $\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x\partial y}=4x\mathbf{i}+(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x)\mathbf{j}$

$-2x\sin yk$；$\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}=4x\mathbf{i}+(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x)\mathbf{j}-2x\sin y\mathbf{k}$。

17. $\mathbf{s}=\pi a^2\mathbf{k}$。

18. 303。

第 五 章

§5.1 习 题

1. （1）分布区域：xOy平面整个区域；等值面：$x+y=c$；（2）除去平面$ax+by+cz+d=0$以外的全部空间区域，等值面为
$\frac{1}{ax+by+cz+d}=c$，即$ax+by+cz+d-\frac{1}{C_1}=0$；（3）坐标满足$z^2\leq x^2+y^2$的点所组成的空间部分，场的等值面为
$z^2=(x^2+y^2)\sin^2c$，是顶点在坐标原点的一族圆锥面。

2. $\begin{cases} y=C_1x, \\ z=C_2x, \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=C_1x, \\ x^2+y^2+z^2=C_2。 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y=2x, \\ x=3x^2。 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-y^2=C_1, \\ x=C_2z。 \end{cases}$

§5.2 习 题

1. 14。

2. $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$。

3. $\frac{2yz}{\sqrt{6}}+\frac{xy}{\sqrt{6}}+\frac{xy+2z}{\sqrt{6}}$。

4. （1）$\frac{10}{3}$；（2）$\{-2,4,-2\}$，$2\sqrt{6}$。

5. $\cos\alpha+\cos\beta$； (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$； (2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$或$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$； (4) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$。

6. (1) $\frac{\Delta u}{\Delta s}$表示温度在从$P$到$Q$的方向上单位距离的平均变化率；

(2) $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$，

$\frac{du}{ds}$表示在P点按PQ方向上温度对距离的变化率，也叫做u的方向导数。

7. $-12\mathbf{i}-9\mathbf{j}-16\mathbf{k}$。

9. -1， $\{7,-5,3\}$。

10. $-\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$。

11. 等值线除$u=0$时为二直线外，其余的都是以Ox轴为实轴的等轴双曲线；在点M_1、M_2处的梯度为$\mathrm{grad}\,u|_{M_1}=2\mathbf{i}-\sqrt{2}\,\mathbf{j}$，$\mathrm{grad}\,u|_{M_2}=3\mathbf{i}-\sqrt{7}\,\mathbf{j}$，其图形都符合所同之事实。

12. (1)在$O(0,0,0)$与$M(1,1,1)$处梯度的模依次是7与$3\sqrt{5}$，方向余弦依次为$\frac{3}{7}$，$\frac{-2}{7}$，$\frac{-6}{7}$与$\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}$，0； (2)梯度为0之点是$(-2,1,1)$。

13. $\frac{10}{3}$。

15. $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$。

17. $x-2y-z=5$； $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-5}{-1}$。

§5.3 习　　题

1. $\phi=3b^4$。

2. $Q=\frac{1}{2}\pi h^2$。

3. $\phi = \frac{12}{5}\pi a^5$。

4. $\phi = 4\pi abc$。

5. (1) $\phi_e = 0$；(2) $\phi_e = q_1$；(3) $\phi_e = q_1 + q_2$。

6. (1) 3；(2) $\frac{2}{r}$。

7. $\text{div}\,\mathbf{a} = 0$，为无源场。

9. (1) 8；(2) 6；(3) 12。

10. 2，-1，-2。

11. $\{3x^2y^4z^2, 4x^3y^3z^2, 2x^3y^4z\}$；$2xy^2(3y^2z^2 + 6x^2z^2 + x^2y^2)$。

12. (1) $\frac{1}{r}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$；(2) $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$；(3) $nr^{n-2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$。

14. $\text{div}\,\mathbf{H} = 0$ ($r \neq 0$)。

15. $12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2$。

16. $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$ (C_1, C_2为任意常数)。

§5.4 习　　题

1. (1) $2\pi R^2$，(2) $2\pi R^2$。

2. $2ab^2$。

3. (1) 环量为零，无旋；(2) 环量不为零，有旋。

4. $2\pi^2b^2$。

5. $\text{rot}\,\mathbf{a}|_M = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$，$\text{rot}_n\mathbf{a}|_M =$ [illegible]。

6. $2 - \sqrt{3}$。

7. $\text{rot}\,\mathbf{a} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$，在$(1, -1, 1)$。

8. (1) 0，(2) 0，(3) 0。

9. $(2x + 2)\mathbf{j}$。

10. (1) $-(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$，(2) $-2(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$，
(3) $2[(y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}]$。

12. $4z(xz-4)\mathbf{j}+3x^2y\mathbf{k}$。

13. (1)$-\frac{1}{r}f'(r)[\mathbf{r}\times\mathbf{c}]$,(2)0。

14. (1)0,(2)$-2\{c,b,a\}$。

15. (1)$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}=\{-3y,-z,-2x-1\}$,

(2)$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}|_M=\{\sqrt{3},-\sqrt{3},-3\}$,

(3)最大值为$|\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_M|=\sqrt{15}$

第 六 章

习 题

1. $-y^2\cos x-x^2\cos y+C$。

2. $u=x^2+yz+xz^2$。

3. (1)$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_1=0$,有势场; $-xyz$; (2)$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_2\neq0$,不是有势场。

5. (1)$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$,

(2)$u=x^3+3x^2y^2+y^4+C$。

6. 6。

7. (1)$-\frac{1}{2}x^2y+C$, (2)$\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2-xy+C$。

8. $-x^2z-y^2z^2+z+C$

9. $f=3xy^2,v=-u=-\frac{1}{4}x^4-3xy^2z$。

10. $\mathbf{b}=[\frac{1}{3}(z^3-z_0^3)-x^2(y-y_0)]\mathbf{i}-y^2(z-z_0)\mathbf{j}+C\mathbf{k}$。

11. $u=x^3-3xy^2$; $v=-y^3+3x^2y$。

12. 是调和场; $v=-x-x^2-2y^2+5xy+3z^2-7yz$。

13. $\mathbf{a}=2(x-1)\mathbf{i}+(-2y)\mathbf{j},v=-x^2+y^2+2x+C$。

14. $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$。

15. $u=x^2+2y^2+xy+2yz-3z^2+C$。

16. $u=x^2-y^2+xy+C,\mathbf{a}=(x-2y)\mathbf{i}-(2x+y)\mathbf{j}$。

第 七 章

1. (1)$\{\cos\theta-\sin\theta,-\sin\theta-\cos\theta,0\}$,

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\alpha-\sin\alpha, -\sin\alpha-\cos\alpha, 0\}$。

2. $2\mathbf{r}$。

3. $\mathrm{div}\,\mathbf{a}=0 \quad (r\neq 0)$。

5. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \varphi=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}, z=z$。

6. $\frac{1}{r\sin\theta}$。

7. $\frac{1}{r\sin\theta}$。

8. $u=f(\rho)=C\ln\rho+C_1$。

9. $n=-3$。

12. $u=f(r)=-\frac{C}{r}+C_1$。

13. $Cr^2\sin\theta\cos\varphi$。

14. 柱坐标：$\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=\rho\mathbf{e}_\rho+z\mathbf{e}_z$，球坐标：$\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=r\mathbf{e}_r$。